Analyse complexe I

Fonctions holomorphes

Exercice 1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer $|z|^2$, $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$ en fonction de z et de $\overline{z}$.

Définition 1. *On dit qu un ensemble $U \subset \mathbb{C}$ est un **ouvert** de $\mathbb{C}$ si :*

$$\forall z \in U, \exists r > 0 : D(z,r) \subset U$$

Exercice 2. Donner 2 exemples d'ensembles ouverts de $\mathbb{C}$ et 2 exemples d'ensembles qui ne sont pas des ouverts de $\mathbb{C}$.

Définition 2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que la fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dérivable au sens complexe en $z_0 \in U$ si la limite*

$$\lim_{h->0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

existe.
*On dit que f est **holomorphe** sur U si elle est dérivable au sens complexe en tout point de U.*

Exercice 3. Démontrer que la fonction $f(z) = z^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et déterminer $f'(z)$.

Exercice 4. Démontrer que la fonction $f(f) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ et vérifie $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par $f(z) = \overline{z}$. Existe-t-il $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que f soit holomorphe en z_0 ?

Exercice 6. On note $z = x + iy$. En quel(s) point(s) la fonction $f(z) = x$ est elle dérivable au sens complexe ? Même question pour $f(z) = y$.

Exercice 7. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ (U est un ouvert de $\mathbb{C}$) et $z_0 \in U$. Démontrer que f est dérivable au sens complexe en z_0 si, et seulement si, il exite $A \in \mathbb{C}$ et une fonction $\epsilon : U \to \mathbb{C}$ vérifiant $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ tels que $f(z_0 + h) = f(z_0) + Ah + h\epsilon(h)$.

Remarque 1. *Une fonction $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ peut-être vue comme une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$. On peut en effet écrire : $f'(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ où $u = \operatorname{Re} f$ et $v = \operatorname{Im} f$. Dans ce cas, on n'hésitera pas à considérer les dérivées partielles de f ainsi que sa matrice jacobienne : $J_{z_0=x_0+iy_0}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$*
De même une fonction $f(x,y)$ défnie sur $\mathbb{R}^2$ pourra être vue comme une fonction définie sur $\mathbb{C}$ en remplaçant x et y grâce aux formule $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$ et $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

Conditions de Cauchy-Riemann

Exercice 8. Condition nécéssaire de dérivabilité au sens complexe.
Soit $f : U \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in U$. On suppose que f est dérivable au sens complexe en z_0. On utilisera quand cela est nécessaire l'identification de la remarque : $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$.

1. Rappeler la définition de la dérivibalité au sens complexe en z_0.
On note $h = h_1 + ih_2$.

2.a. Réécrire la définition rappelée ci-dessus dans le cas où $h_2 = 0$. En déduire une expression de $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$ et de $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$ en fonction de $f'(z_0)$.
2.b. Réécrire la définition rappelée ci-dessus dans le cas où $h_1 = 0$. En déduire une expression de $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$ et de $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$ en fonction de $f'(z_0)$.

3.a Ecrire la relation vérifiée par $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$.
3.b Ecrire la relation vérifiée par $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$.

Ces relations s'appellent **conditions de Cauchy-Riemman**.

4. Ecrire la matrice jacobienne de f en (x_0,y_0).

5. De quelle transformation géométrique cette matrice jacobienne est-elle la matrice ?

Théorème 1. *Soit $f : U \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. f est dérivable au sens complexe en z_0 si, et seulement si, $f(x,y)$ est différentiable en (x_0,y_0) et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann : $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$*

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(x+iy) = \begin{cases} xy/(x^2+y^2) \text{ si } x+i & \neq & 0 \\ 0 \text{ si } x & = & y=0 \end{cases}$.

1. Démontrer que la fonction f satisfait les équations de Cauchy-Riemann en 0.
2. Démontrer que la fonction f n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable en 0.

Définition 3. *Pour $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$, on définit les deux opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ par :*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Big) \ \text{et} \ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Big)$$

Ces deux opérateurs vérifient les formules de dérivations usuelles : $\frac{\partial fg}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}g + f\frac{\partial g}{\partial z}$, etc...

Exercice 10. Calculer $\frac{\partial z}{\partial z}$, $\frac{\partial \overline{z}}{\partial z}$, $\frac{\partial z}{\partial \overline{z}}$ et $\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}}$.

Exercice 11. Soit $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable en $z_0 = x_0 + iy_0$. Prouver que f est dérivable au sens complexe en z_0 si, et seulement si, $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$.

Exercice 12. Déterminer les conditions sur les réels a, b, c et d qui rendent holomorphe la fonction f définie par $f(z) = ax + by + i(cx + dy)$.

Exercice 13. On considère la fonction C^∞ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x^2 - y^2 - x, 2xy - y)$. Prouver que f vérifie les conditions de Cauchy-Riemman :

1. En utilisant la définition.
2. En utilisant l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$.

Exercice 14. Déterminer parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont holomorphes sur $\mathbb{C}$:

1. $f(z) = z + \overline{z}^2$
2. $f(x,y) = x^2 + y^2$
3. $f(x,y) = 4x^3 - y$
4. $f(x,y) = 2x - 3y$
5. $f(z) = (z-1)^3 + \mathrm{Re}(z)$
6. $f(z) = \sin(z) + \cos(\overline{z})$
7. $f(z) = 2iz^2 + 3z - 5i$
8. $f(z) = z + (\mathrm{Im}\, z)^2$

Intégrale le long d'un chemin

Exercice 15. Calculer $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ lorsque γ est le cercle unité parcouru une seule fois dans le sens direct.

Exercice 16. Calculer $\int_{[a;B]} \frac{dz}{z}$ lorsque $[A;B]$ est un segment horizontal. Même question si le segment est vertical.

Exercice 17. Calculer $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ lorsque γ est un carré contenant l'origine.

Exercice 18. Calculer $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ lorsque γ est un carré ne contenant pas l'origine.