# Analyse complexe II

## Fonctions holomorphes

**Exercice 1.** Déterminer les conditions sur les réels $a$, $b$, $c$ et $d$ qui rendent holomorphe la fonction $f$ définie par $f(z) = ax + by + i(cx + dy)$.

**Exercice 2.** On considère la fonction $C^\infty$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x^2 - y^2 - x, 2xy - y)$. Prouver que $f$ vérifie les conditions de Cauchy-Riemann :
1. En utilisant la définition.
2. En utilisant l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$.

**Exercice 3.** Déterminer parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ :
1. $f(z) = z + \overline{z}^2$
2. $f(x, y) = x^2 + y^2$
3. $f(x, y) = 4x^3 - y$
4. $f(x, y) = 2x - 3y$
5. $f(z) = (z - 1)^3 + \mathrm{Re}(z)$
6. $f(z) = \sin(z) + \cos(\overline{z})$
7. $f(z) = 2iz^2 + 3z - 5i$
8. $f(z) = z + (\mathrm{Im}\, z)^2$
9. $f(z) = \frac{1+z^2}{z-1}$
10. $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)}$
11. $f(z) = \frac{1}{1-z}$

## Fonctions analytiques

**Exercice 4.** On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
1. Justifier que $f$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Développer $f$ en série en 0.
On note $R$ son rayon de convergence.
3. Déterminer R.
4. Pouquoi n'a-t-on pas $R > 1$ ?

**Définition 1.** *Soit $f : U \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On dit que $f$ est **analytique** sur $U$ si pour tout $z_0 \in U$, il existe un disque ouvert $D(z_0, r)$ et des coefficients $c_n \in \mathbb{C}$ tels que $\forall z \in D(z_0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$.*

**Exercice 5.** Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$ (rayon de CV $> 0$).
1. Calculer $f(0)$, $f'(0)$, $f^{(2)}(0)$ et $f^{(3)}(0)$.
2. Proposer une formule pour $f^{(n)}(0)$. En déduire une formule pour $c_n$.

**Exercice 6.** Déterminer le développement en série à l'origine de $\frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{(1-z)^2}$, $\frac{1}{(1-z)^3}$, $\frac{1}{(1-z)^4}$.

**Exercice 7.** Déterminer en tout $z_0 \neq 1$ la série de Taylor et son rayon de convergence pour la fonction analytique $\frac{1}{z-1}$.

**Exercice 8.** Déterminer en tout $z_0 \neq 1,\ 2$ le développement en série et son rayon de convergence pour la fonction analytique $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$. On aura intérêt à réduire en éléments simples. De plus on demande d'indiquer le rayon de convergence *avant* de déterminer explicitement la série de Taylor.

**Exercice 9.** Déterminer en tout point $z_0$ où elle est définie la série de Taylor de la fonction $\frac{1}{z^3-1}$. On déterminera son rayon de convergence en fonction de $z_0$.

## Intégrale le long d'un chemin

**Définition 2.** *Soit $\gamma : [a; b] \to \mathbb{C}$ un chemin et $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On appelle **intégrale de $f$ le long de $\gamma$** la quantité : $\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$*

**Exercice 10.** Soient $z_0$ e $z_1$ deux nombres complexes et $R > 0$.
1. Donner un paramétrage du cercle de centre $z_0$ et de rayon $R$, parcouru une seule fois dans le sens direct.
2. Donner un paramétrage du segment $[z_0 z_1]$.

**Exercice 11.** Calculer $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ lorsque $\gamma$ est le cercle unité parcouru une seule fois dans le sens direct.

**Exercice 12.** Calculer $\int_{\mathcal{C}(0;R)} \frac{dz}{z^n}$ pour $n \neq 1$.

**Exercice 13.** Exprimer $\int_{[a;B]} \frac{dz}{z}$ lorsque $[A; B]$ est un segment horizontal. Même question si le segment est vertical.

**Théorème 1.** *Soient $U$ un ouvert, $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ et $\gamma : [a; b] \to \mathbb{C}$ un chemin. Si $f$ admet une primitive sur $U$ (i.e. il exite une fonction $F$ définie sur $U$ telle que $\forall z \in U, F'(z) = f(z)$), alors $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.*

**Exercice 14.** Calculer $\int_\gamma \frac{dz}{(z-2)^3}$ lorsque $\gamma$ est un chemin allant de $1 + i$ à $5 - 3i$ sans passer par 2.

**Exercice 15.** Calculer $\int_\gamma 2ze^{z^2}$ lorsque $\gamma$ est un chemin allant de $z_A = -2 + i$ à $z_B = 3 + i$. Si $z_A = z_B$ que vaut alors l'intégrale ?

**Définition 3.** *On dit que deux chemins $\gamma_1 : [a_1; b_1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a_2; b_2] \to \mathbb{C}$ sont homotopes dans $U$ si :*
*- $\gamma_1([a_1; b_1]) \subset U$ et $\gamma_2([a_1; b_1]) \subset U$*
*- $\gamma_(a_1) = \gamma_2(a_2)$ et $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$*
*- on peut **déformer contiûment** $\gamma_1$ en $\gamma_2$ **sans sortir de** $U$.*
*Un **lacet** est un chemin dont les deux extrémités sont égales.*
*On dit qu'un lacet est **contractile** dans $U$ si on peut le déformer contiûment en un point sans sortir de $U$.*

**Exercice 16.** On note $\mathcal{A}_{r_1,r_2}(z_0)$ la couronne $\{z \text{ tels que } r_1 < |z - z_0| < r_2\}$.
1. Réprésenter $\mathcal{A}_{1,3}(2)$.
2. Donner un exemple de :
2. a. 2 chemins homotopes dans $\mathcal{A}_{1,3}(2)$.
2. b. 2 chemins non homotopes dans $\mathcal{A}_{1,3}(2)$.
2. c. lacet contractile dans $\mathcal{A}_{1,3}(2)$.
2. d. lacet non contractile dans $\mathcal{A}_{1,3}(2)$.

**Théorème 2.** *Théorème de Cauchy-Gauss.*
*Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f$ une fonction holomorphe sur $U$. Si $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont deux chemins de mêmes extrémités (fixées) et homotopes dans $U$, alors : $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$.*

**Exercice 17.** Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f$ une fonction holomorphe sur $U$. Soit $\gamma$ un lacet contractile dans U. Prouver que $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

**Exercice 18.** Calculer $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ lorsque :
1. $\gamma$ est un carré contenant l'origine
2. $\gamma$ est un carré ne contenant pas l'origine.

**Exercice 19.** Soit $0 < a < b$ sur l'axe réel positif et soit $C = \{|z| = r\}$ le cercle de rayon $r$ centré en l'origine, parcouru dans le sens direct. Prouver que : $\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz = 2\pi i \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{1}{a-b} & a < r < b \\ 0 & r > b \end{cases}$ On pourra réduire la fraction en élément simples, puis se ramener au résultat d' un exercice précédent. Ou encore, on pourra envisager des développements en séries, pour se ramener par étapes aux intégrales $\int_C z^n dz$, $n \in \mathbb{Z}$.

**Définition 4.** *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\gamma$ un lacet ne passant pas par $z_0$. On appelle **indice de $\gamma$ par rapport à** $z_0$ la quantité $Ind_\gamma(z_0) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$. On peut démontrer que $Ind_\gamma(z_0)$ est un entier qui correspond au nombre de tours qu'effectue le lacet autour de $z_0$ (dans le sens direct).*

## Logarithme complexe

**Exercice 20.** On munit le plan d'un repère orthonormé dont l'origine est notée $O$. Soit $M(x; y)$ un point du plan différent de $O$.

1. Tracer le repère et placer M dans le premier quadrant.
2. Tracer $\mathcal{C}$ le cercle de centre $O$ et de rayon $OM$. $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en $A$ et $B$ ($A$ est dans le demi-plan de gauche et $B$ dans celui de droite).

On note $\theta$ l'angle orienté $\widehat{BOM}$ et $\alpha$ l'angle orienté $\widehat{OAM}$.

3. Prouver que $\theta = 2\alpha$. Ce résultat s'appelle **théorème de l'angle au centre**.
4. Quelles valeurs parcourt $\alpha$ quand $\theta$ parcourt l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{pi}{2}[$ ?

**Exercice 21.** Soit $z = x + iy$ et $w = a + ib$ deux nombres complexes. Résoudre $e^z = w$. *Indication :*deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même module et même argument modulo $2\pi$.

**Exercice 22.** On cosidère la fonction $f$ définie sur $U = \mathbb{C}\backslash]-\infty; 0]$ par $f(z) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + 2i \arctan \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$.

1. Prouver que $f$ vérifie les conditions de Cauchy-Riemann. $f$ est-elle holomorphe sur $U$ ?
2. Caluler $f'(z)$.
3. $f$ est-elle continue en un point de $]-\infty; 0[$ ?

## Séries de Laurent

**Exercice 23.** On considère la fonction $f(z) = \frac{1}{(z-2)^3} + \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z-2)} + 1 + (z-2) + (z-2)^2 + (z-2)^3 + ... + (z-2)^n + ....$
1. Ecrire $f(z)$ à l'aide du symbole $\sum$.
2. Caculer $\int_{(C)(2;1)} f(z)dz$.
3. Même question avec $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n(z-2)^n$ (on suppose que la série converge sur un ouvert contenant $\overline{D(2,1)}$.