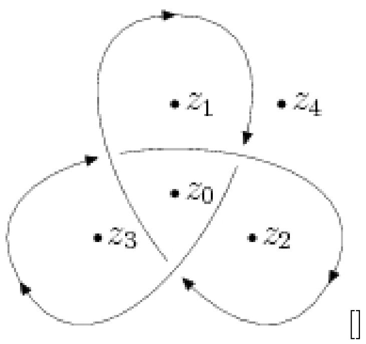
Analyse complexe III

Intégrale le long d'un chemin

Définition 1. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et γ un lacet ne passant pas par z_0. On appelle* ***indice de γ par rapport à*** *z_0 la quantité $Ind_\gamma(z_0) := \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$. On peut démontrer que $Ind_\gamma(z_0)$ est un entier égal au nombre de tours qu'effectue le lacet autour de z_0 (dans le sens direct).*

Exercice 1. On considère dans le plan complexe un chemin fermé paramétré γ qui parcourt la figure ci-dessus dans le sens indiqué.



Pour $j = 0, 1, 2, 3, 4$ on note

$$A_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_j} \quad \text{et} \quad B_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_j)^2}$$

Déterminer, en le justifiant, les valeurs de A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, et de B_0, B_1, B_2, B_3, B_4. On précisera aussi quel est le nom que l'on donne aux quantités données par les intégrales A_j, $j = 0 \ldots 4$.

Théorème 1. *Théorème de Cauchy-Gauss.*
Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U. Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins de mêmes extrémités (fixées) et homotopes dans U, alors : $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$.

Exercice 2. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Soit γ un lacet contractile dans U. Prouver que $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Exercice 3. Formules de Cauchy.
Soit U un ouvert **sans trou** de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur U, γ un lacet contractile dans U et z un point de U n'appartenant pas à γ, alors $f(z).\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$.

Théorème 2. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U et $z_0 \in U$. Alors il existe des coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uniques, et $r > 0$ tels que :*

$$\forall z \in \mathcal{C}_{(z_0,r)}, f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_0(z-z_0)^2 + ... + c_n(z-z_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

et les coefficients c_n sont donnés par :

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw, \text{ pour } \overline{\mathcal{C}(z_0,r)} \subset U$$

Le rayon de convergence est au moins égal à la distance entre z_0 et le complémentaire de U.

Exercice 4. Déterminer le développement en série à l'origine de $\frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{(1-z)^2}$, $\frac{1}{(1-z)^3}$, $\frac{1}{(1-z)^4}$.

Exercice 5. Déterminer en tout $z_0 \neq 1$ la série de Taylor et son rayon de convergence pour la fonction analytique $\frac{1}{z-1}$.

Séries de Laurent

Théorème 3. *Développement en série de Laurent.*
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Si f est une fonction holomorphe sur la couronne $\mathcal{A}_{r_1,r_2}$, centrée en z_0. Alors il existe des coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, uniques, tels que :

$$\begin{aligned} f(z) &= ... + c_{-n}\tfrac{1}{(z-z_0)^n} + ... + c_{-2}\tfrac{1}{(z-z_0)^2} + c_{-1}\tfrac{1}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_0(z-z_0)^2 + ... + c_n(z-z_0)^n + ... \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

et les coefficients c_n sont donnés par : $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$, pour $\overline{\mathcal{C}(z_0,r)} \subset U$
Le coefficients c_{-1} s'appelle ***résidu de f en*** *z_0, on le note $Res(f, z_0)$. La série converge pour tout z dans la couronne.*

Exercice 6. On considère la fonction $f(z) = \frac{1}{(z-2)^3} + \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z-2)} + 1 + (z-2) + (z-2)^2 + (z-2)^3 + ... + (z-2)^n + ...$.
1. Ecrire $f(z)$ à l'aide du symbole $\sum$.
2. Caculer $\int_{\mathcal{C}(2;1)} f(z)dz$.
3. Même question avec $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n(z-2)^n$ (on suppose que la série converge sur un ouvert contenant $\overline{D(2,1)}$.

Exercice 7. Déterminer les séries de Laurent de $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans chacune des trois couronnes ouvertes $0 < |z| < 1$, $1 < |z| < 2$, $2 < |z| < \infty$, ainsi que les séries de Laurent de f aux points 0, 1, 2, et 3. Quels sont les résidus en $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ et $z = 3$?

Résidus

Exercice 8. Déterminer les séries de Laurent et les résidus à l'origine des fonctions : $f(z) = \frac{1}{z}$, $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ et $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$.

Exercice 9. Justifier les formules suivantes :
Lorsque f présente en z_0 un pôle simple on a : $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$
Lorsque f présente en z_0 un pôle d'ordre au plus N on a : $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(N-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{N-1}(z - z_0)^N f(z)$

Théorème des résidus

Théorème 4. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, z_1, z_2,..., z_n un nombre finis de points distincts de U et f une fonction holomorphe sur $U\backslash\{z_1, z_2, ..., z_n\}$. Soit γ un lacet contractile dans U, ne passant par aucun des points z_1, z_2,..., z_n, alors :*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Ind_\gamma(z_j)Res(f, z_j)$$

Exercice 10. Soit $0 < a < b < c$ et soit C le cercle de rayon r centré en l'origine, parcouru dans le sens direct. Calculer $\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}dz$ selon la valeur de r. On donnera deux preuves, soit en utilisant le théorème des résidus, soit en décomposant en éléments simples.

Exercice 11. Que vaut, en fonction de $R > 0$: $\int_{|z|=R} \frac{dz}{2z^2-5z+2}$? On précisera les valeurs exclues de R.

Exercice 12. Déterminer, $\mathcal{C}$ désignant tour à tour le cercle $|z - i| = 1$, ou le cercle $|z + i| = 1$, ou encore $|z| = 2$, parcourus dans le sens direct, les valeurs des intégrales : $\int_\mathcal{C} \frac{1}{z^2+1}\,dz$, $\int_\mathcal{C} \frac{1}{z^3-1}\,dz$, $\int_\mathcal{C} \frac{1}{z^4-1}\,dz$ et $\int_\mathcal{C} \frac{1}{z^5-1}\,dz$.

Exercice 13. Déterminer pour A, B, C réels, avec $A^2 > B^2 + C^2$ la valeur de : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A+B\sin\theta+C\cos\theta}$
On aura intérêt, comme première étape, à poser $B = R\cos\phi$, $C = R\sin\phi$.

Exercice 14. Que vaut en fonction de $R > 0$: $\int_{|z|=R} \frac{z^2+1}{z^3-z^2-4z+4}dz$?

Exercice 15. Confirmer par le calcul des résidus la valeur connue (arctan . . . !) : $\int_\mathbb{R} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$. On appliquera le théorème des résidus au contour direct comportant le segment $[-R, +R]$ et le semi-cercle de rayon R dans le demi-plan supérieur, pour $R \to +\infty$.

Exercice 16. Justifier $\int_\mathbb{R} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2}dx = \int_\mathbb{R} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^2}dx$ pour $\xi \in \mathbb{R}$. Prouver par un calcul de résidu $\int_\mathbb{R} \frac{e^{i\xi x}}{1+x^2}dx = \pi e^{-|\xi|}$
Suivant le cas $\xi \geq 0$ ou $\xi < 0$ on complètera le segment $[-R, +R]$ par un semi-cercle dans le demi-plan supérieur, ou inférieur, afin que la contribution du semi-cercle tende vers 0 pour $R \to \infty$. On peut aussi observer que l'intégrale est une fonction paire de ξ et que l'on peut donc se restreindre à $\xi \geq 0$.

Exercice 17. Déterminer $\int_\mathbb{R} \frac{1}{1+x^4}\,dx \qquad \int_\mathbb{R} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx \qquad \int_\mathbb{R} \frac{1}{1+x^2+x^4}\,dx$

Logarithme complexe

Exercice 18. On munit le plan d'un repère orthonormé dont l'origine est notée O. Soit $M(x; y)$ un point du plan ($\neq O$).
1. Tracer le repère et placer M dans le premier quadrant.
2. Tracer $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon OM. $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en A et B (A est dans le demi-plan de gauche et B dans celui de droite). On note θ l'angle orienté $\widehat{BOM}$ et α l'angle orienté $\widehat{OAM}$.
3. Prouver que $\theta = 2\alpha$. Ce résultat s'appelle **théorème de l'angle au centre**.
4. Quelles valeurs parcourt α quand θ parcourt l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{pi}{2}[$?

Exercice 19. Soit $z = x + iy$ et $w = a + ib$ deux nombres complexes. Résoudre $e^z = w$. *Indication :*deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même module et même argument modulo 2π.

Exercice 20. On considère la fonction f définie sur $U = \mathbb{C}\backslash]-\infty; 0]$ par $f(z) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + 2i \arctan \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$.
1. Prouver que f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann. f est-elle holomorphe sur U ?
2. Caluler $f'(z)$.
3. f est-elle continue en un point de $]-\infty; 0[$?