Introduction aux EDP : le problème de transport

Définition 1. *On appelle **équation de transport** une équation aux dérivées partielles (**EDP**) du type*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = r$$

où a et r sont des fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
Une solution de cette équation est une fonction u de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = r(x,t)$$

Remarque : a et r doivent vérifier certaines conditions qui seront ici ignorées.

Définition 2. *Un **problème de transport** est une équation de transport avec **condition initiale** :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} & = & r \ (E) \\ u(.,0) & = & u_0 \ \textit{(condition initiale)} \end{array} \right.$$

où u_0 est une fonction C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Une solution de ce problème est une fonction u, solution de (E), qui vérifie de plus : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x,0) = u_0(x)$.

Exemple 1. *Voici un exemple de problème de transort :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t} + xt\frac{\partial u}{\partial x} & = & t \\ u(.,0) & = & \cos \ \textit{(ce qui signifie } \forall x \in \mathbb{R}, u(x,0) = \cos(x)\textit{)} \end{array} \right.$$

Ici, $a(x,t) = xt$, $r(x,t) = t$ et $u_0(x) = \cos(x)$.

Résolution d'un problème de transport

La résolution d'un tel problème peut se décomposer en 5 étapes.

Etape 1 - Identifier les fonctions a, r et u_0

Dans l'exemple, $a(x,t) = xt$, $r(x,t) = t$ et $u_0(x) = \cos(x)$.

Etape 2 - Résoudre l'équation différentielle linéaire associée

On doit associer et résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y'(s) & = & a(Y(s),s) \\ \forall t \in \mathbb{R}_+, Y(t) & = & x \end{array} \right.$$

Remarque : on a introduit la variable s.
Dans l'exemple, l'équation différentielle est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y'(s) & = & Y(s)s \ (E_1) \\ Y(t) & = & x \ \text{(pour tout } t \in \mathbb{R}+\text{)} \end{array} \right.$$

On cherche $X(s)$ les solution générales de (E_1). On trouve $X(s) = Ae^{\frac{s^2}{2}}$.
On détermine A grâce à la condition initiale $X(t) = x$, qui donne $A = xe^{-\frac{t^2}{2}}$. On obtient ainsi l'unique solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale : $X_{x,t}(s) = xe^{\frac{s^2-t^2}{2}}$.

Etape 3 - Calcul de $I_{(x,t)} = \int_0^t r\big(X_{(x,t')}(0), t'\big)dt'$

Toujours dans l'exemple, $I_{(x,t)} = \int_0^t t'dt' = \frac{t^2}{2}$.

Etape 4 - Conclusion

Un théorème permet alors d'affirmer que l'unique solution au problème de transport est la fonction u définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ par

$$u(x,t) = u_0\big(X_{x,t}(0)\big) + \int_0^t r\big(X_{(x,t')}(0), t'\big)dt'$$

Dans l'exemple, cela donne : $u(x,t) = \cos(xe^{\frac{-t^2}{2}}) + \frac{t^2}{2}$.

Etape 5 - Vérification

On s'assure que la condition initiale est vérifiée : Dans l'exemple : $u(x,0) = \cos(x \times 1) + 0 = u_0(x)$
On calcule les dérivées partielle de la fonction obtenue pour vérifier que cette dernière est bien solution. Dans l'exemple :
$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -e^{-\frac{t^2}{2}} \sin(xe^{-\frac{t^2}{2}})$
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\sin(xe^{-\frac{t^2}{2}})(-xte^{-\frac{t^2}{2}}) + t$

Exercice 1. Résoudre le problème de transport suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} & = & 2 \\ \forall x \in \mathbb{R}, u(x,0) & = & x \end{array} \right.$$

Exercice 2. Résoudre le problème de transport suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t} + (x+1)\frac{\partial u}{\partial x} & = & 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, u(x,0) & = & e^x \end{array} \right.$$

Exercice 3. Résoudre le problème de transport suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t} + xt\frac{\partial u}{\partial x} & = & t \\ \forall x \in \mathbb{R}, u(x,0) & = & \cos(x) \end{array} \right.$$

Exercice 4. Résoudre le problème de transport suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{x}{1+t^2}\frac{\partial u}{\partial x} & = & \frac{1}{1+t^2} \\ \forall x \in \mathbb{R}, u(x,0) & = & x \end{array} \right.$$

Exercice 5. Résoudre le problème de transport suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t} + xt\frac{\partial u}{\partial x} & = & xt \\ \forall x \in \mathbb{R}, u(x,0) & = & x \end{array} \right.$$