Outils Mathématiques IngéSpé
Planche d'exercices communs

Dans ce document, sont proposés, pour chaque chapitre, des exercices qui devront être traités dans chaque site :

1. un ou plusieurs exercices d'application.
2. un exercice plus exigeant, problème.

Chapitre 1. Calcul différentiel. (4 semaines)

Le premier MiMo "topologie sur $\mathbb{R}^2$" étant particulièrement difficile, il est préconisé, de ne reprendre/présenter que les notions (norme, disque ouvert/fermé, voisinage) directement utiles dans l'analyse de fonctions à deux variables réelles.

Exercice. Pour chacune des fonctions suivantes, préciser si elle est continue, différentiable ou continûment différentiable en $(0, 0)$:

1. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2y^2/(x^2 + y^2)\mathbf{1}_{(x,y)\neq(0,0)}$.
2. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x^3 - y^3)/(x^2 + y^2)\mathbf{1}_{(x,y)\neq(0,0)}$.
3. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto xy^3/(x^4 + y^2)\mathbf{1}_{(x,y)\neq(0,0)}$.
4. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto y^4/(x^2 + y^2)\mathbf{1}_{(x,y)\neq(0,0)}$.
5. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x^2 + y^2)\sin(1/\sqrt{x^2 + y^2})\mathbf{1}_{(x,y)\neq(0,0)}$.

Exercice. Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^3 + y^3$.
2. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^2 + xy + y^2$.
3. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto x^3 - 3xy + y^3$.
4. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto e^{xy} - xy - 1$.

Exercice. Résoudre les problèmes de transport suivants :

1. $\partial u/\partial t + 2\partial u/\partial x = 2$ avec $u(x, 0) = x$; $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. $\partial u/\partial t + (x + 1)\partial u/\partial x = 0$ avec $u(x, 0) = e^x$; $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. $\partial u/\partial t + xt\partial u/\partial x = t$ avec $u(x, 0) = \cos(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$.
4. $\partial u/\partial t + x/(1 + t^2)\partial u/\partial x = 1/(1 + t^2)$ avec $u(x, 0) = x$; $\forall x \in \mathbb{R}$.
5. $\partial u/\partial t + xt\partial u/\partial x = xt$ avec $u(x, 0) = x$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice plus difficile. Soient $m \in \mathbb{R}$ et $f_m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_m(x, y) = \frac{m + x^2}{1 + x^2 + y^2} \ ; \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Etudier l'existence d'un extremum local en $(0, 0)$ pour la fonction f_m, selon les valeurs du paramètre m.

Chapitre 2. Analyse complexe. (4 semaines)

Programme :

1. Fonctions holomorphes.
   (a) Quelques éléments de topologie sur $\mathbb{C}$.
   (b) Définition d'une fonction d'une variable complexe.
   (c) Définition d'une fonction holomorphe.
   (d) Conditions nécessaire (condition de Cauchy-Riemann) et suffisante d'holomorphie.
2. Intégration le long d'un chemin.
   (a) Définitions et exemples : chemin, lacet, concaténation de deux chemins.
   (b) Intégration le long d'un chemin
      i. Longueur d'un chemin
      ii. Définition de l'intégrale le long d'un chemin.
      iii. Formule intégrale de Cauchy.
3. Théorème des résidus et application au calcul d'intégrales.
   (a) Développement en série de Laurent.
   (b) Définitions : singularités, pôles d'une fonction.
   (c) Théorème des résidus.

Exercice. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$f(x+iy) = \begin{cases} xy/(x^2+y^2) & \text{si} \quad x+iy \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=y=0 \end{cases} \; ; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que la fonction f satisfait les équations de Cauchy-Riemann en 0.
2. Montrer que la fonction f n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable en 0.

Exercice.
Déterminer les conditions sur les réels a, b, c et d qui rendent la fonction f définie par :

$$f(z) = ax + by + i(cx + dy) \text{ holomorphe.}$$

Exercice.

1. Montrer que la fonction $P(x,y) = x^3 - 3xy^2$ est harmonique.
2. Trouver une fonction holomorphe f de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ telle que $Re(f(z)) = P(x,y)$, et expliciter l'expression de f en fonction de z.

Exercice. Majorer

$$\left| \int_\gamma \frac{dz}{z^2+4} \right|$$

lorsque

1. γ est le segment $[0, 1+i]$.
2. γ est le cercle $\mathrm{C}(0, 10)$.

Exercice.
Évaluer $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+1}{(z-1)(z+2)}\, dz$ lorsque γ est :

1. le cercle $\{z \in \mathbb{C}, |z| = \dfrac{1}{2}\}$.
2. le cercle $\{z \in \mathbb{C}, |z| = \dfrac{3}{2}\}$.
3. le rectangle de sommets $-4+i; -4-i; 2+i; 2-i$.

Toutes les courbes sont parcourues dans le sens positif.

Exercice.
Évaluer par le calcul des résidus

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a + b\cos t + c\sin t} \quad \text{avec } a^2 > b^2 + c^2.$$

Problème. Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx.$$

Soient $r > 2$, $\mathrm{I}_r := [-r, r]$, $\gamma_r : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\gamma_r(t) := re^{it} \ ; \forall t \in [0, \pi],$$

et $\widetilde{\gamma}_r$ la concaténation des chemins I_r et γ_r.

1. Tracer le chemin $\widetilde{\gamma}_r$ dans le plan complexe.
2. Calculer
$$\int_{\widetilde{\gamma}_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz.$$
3. Montrer que :
$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = 0.$$
4. Conclure.

Chapitre 3. Probabilités. (4 semaines)

Programme :

1. Mesures de probabilités.
   (a) Définition, exemples.

   (b) Espace probabilisé.
2. Conditionnement et indépendance.
   (a) Définition.
   (b) Formule de Bayes, formule des probabilités totales.
3. Variables aléatoires réelles.
   (a) Définition.
   (b) Loi, fonction de répartition d'une VAR
   (c) VAR discrètes, à densité.
   (d) Définitions et propriétés : espérance, variance. Théorème de transfert.
   (e) VA indépendantes.
4. Lois de probabilités usuelles (Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson, exponentielle, normale).
5. Inégalités et théorèmes limites classiques.
   (a) Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
   (b) Convergences : en probabilité, en loi.
   (c) Loi faible des grands nombres.
   (d) Théorème de la limite centrale.

Exercice. Soient $c, p > 0$ et μ la mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que :

$$\mu(\{k\}) = \frac{cp^k}{(1+p)^k} \ ; \forall k \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer la constante $c > 0$ de sorte que μ soit une mesure de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
2. Calculer l'espérance d'une variable aléatoire X de loi de probabilité μ.

Exercice. Soient $c > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = c(x^2+1)e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \ ; \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!.$$

2. Déterminer la constante $c > 0$ de sorte que f soit une densité de probabilité.
3. Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X dont la loi a pour densité f.

Exercice. Dans un lot de mille ampoules d'un certain fabriquant, une étude statistique a montré qu'une ampoule a une chance sur trois d'être défectueuse. Parmi cinq ampoules tirées sans remise dans un lot de mille, soit X le nombre d'ampoules défectueuses.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ? Préciser son espérance et sa variance.

2. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas d'ampoule défectueuse ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y ait au plus une ampoule défectueuse ?

Exercice. Une étude épidémiologique porte sur la survenue dans la population générale d'une maladie opportuniste très fréquente avec et sans traitement de fond. Le nombre de survenues X de la maladie chez un individu durant un an suit la loi de Poisson de paramètre 5. S'il est efficace, le traitement de fond réduit ce paramètre à 3. La probabilité que le traitement fasse effet est de 0.75. Un patient essaye le traitement et contracte deux fois la maladie durant l'année qui suit.
Quelle est la probabilité que le médicament ait eu un effet sur lui ?

Exercice. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Montrer que :
$$\mathbb{P}(\mathrm{X} > s + t | \mathrm{X} > s) = \mathbb{P}(\mathrm{X} > t) \ ; \forall s, t \in \mathbb{R}_+.$$
2. Pour $\lambda = 0.05$, il est désormais supposé que X désigne la durée de vie en mois d'un organisme vivant.
   (a) Quelle est l'espérance de vie de l'organisme.
   (b) Quelle est la probabilité que l'organisme vive plus de deux ans.
   (c) Quelle est la probabilité que l'organisme vive plus de trois ans, sachant qu'il a déjà vécu plus d'un an.

Problème. Soit une urne contenant cinq boules indiscernables au toucher, dont une est noire et quatre sont blanches. L'ensemble des boules contenues dans l'urne est noté Ω.
Un joueur tire une boule dans l'urne, note sa couleur, puis la remet dedans. Il répète $n \in \mathbb{N}^*$ fois cette opération.
Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathrm{X}_i : \Omega \to \{0, 1\}$ désigne la variable aléatoire définie par :
$$\mathrm{X}_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \text{ est la boule noire} \\ 0 & \text{si} \quad \omega \text{ est une boule blanche} \end{cases} \ ; \forall \omega \in \Omega.$$

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$. Calculer l'espérance et la variance de $\overline{\mathrm{X}}_n = \mathrm{S}_n / n$ de deux façons.
2. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :
$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\left| \overline{\mathrm{X}}_n - \frac{1}{5} \right| > \varepsilon \right) = 0 \ ; \forall \varepsilon > 0.$$
   Que signifie ce résultat ? Quel théorème limite fournit directement ce résultat ?
3. A l'aide du théorème de la limite centrale, montrer que :
$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\overline{\mathrm{X}}_n > \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{2}.$$