Théorème de Rolle

Théorème 1. *Théorème de Rolle.*
Étant donné des réel a et b tels que $a < b$ ainsi qu'une fonction :
- *continue sur $[a, b]$*
- *dérivable sur $]a, b[$*
- *telle que $f(a) = f(b)$*

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Définition 1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$.*
On dit que f a un maximum local en x_0 si $\exists \alpha > 0 : \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap I, f(x) \leq f(x_0)$.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $[-2, 1]$ par $f(x) = x^2 + x - 2$.
1. Vérifier que le théorème de Rolle peut s'appliquer à f.
2. Trouver le réel c qui satisfait la conclusion du théorème.

Exercice 2. Trouver les points critiques de $x \mapsto \frac{3x^2-5x-1}{x-2}$.

Exercice 3. Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels qui possède n racines réelles distinctes. Montrer que P' possède $n - 1$ racines réelles distinctes.

Exercice 4. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ $(a < b)$, dérivable sur $[a, b]$. On suppose que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$. Montrer que :

$$\exists c \in]a, b[: f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}$$

Exercice 5. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction $(a < b)$. Soit $x_0 \in]a; b[$. On suppose que f est dérivable en x_0 et que f a un maximum local en x_0.
1. Rappeler la définition de $f'(x_0)$.
2. Rappeler la définition de : f a un maximum local en x_0.
3. Prouver que $f'(x_0) \geq 0$.
4. Prouver que $f'(x_0) \leq 0$.
5. Conclure.
6. Que dire si f a un minium local en x_0 ?

Exercice 6. Preuve du théorème de Rolle.
Soit $f ; [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a) = f(b)$.
1. Prouver qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que f a un extremum local en x_0 (utiliser le théorème des valeurs intermédiaires : l'image d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné).

On suppose de plus que f est dérivable sur $]a, b[$.

2. Prouver que $f'(x_0) = 0$.
3. Conclure.

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$.
1. Etudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition et calculer sa fonction dérivée.
2. Déterminer les points critiques de f.

Théorème des accroissements finis

Théorème 2. *Théorème (ou égalité) des accroissements finis.*
Étant donné des réel a et b tels que $a < b$ ainsi qu'une fonction :
— *continue sur $[a, b]$*
— *dérivable sur $]a, b[$*
alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Exercice 8. Soit f une fonction dérivable sur $[1, 4]$ telle que $\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{3}{2}$. Donner un encadrement de $f(4) - f(1)$.

Exercice 9. Donner un encadrement de $\sqrt[3]{1001}$.

Exercice 10. Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, montrer les inégalités :

$$\frac{2}{\pi}x \leq sin(x) \leq x$$

Exercice 11. Étudier les variations de $x \mapsto sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$.

Exercice 12. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ $(a < b)$. On suppose que f est dérivable sur $]a, b[$ et que $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$.
1. Rappeler la définition de la croissance d'une fonction.
2. Prouver que f est croissante (utiliser l'égalité des accroissements finis).

Exercice 13. Preuve de l'égalité des accroissements finis.
Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ $(a < b)$, dérivable sur $]a, b[$. Soit (D) la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. (D) a pour équation $y = mx + p$.
1. Illustrer la situation.
2. Trouver m et p.
3. Justifier que le théorème de Rolle est applicable à la fonction g définie par $g(x) = f(x) - (mx + p)$.
4. Appliquer le théorème de Rolle à g et conclure.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(x)$.
1. Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $f'(c)$.
2. a. Soit $x \geq$ et $c \in [1; \sqrt{x}]$. Encadrer $f'(c)$.
2. b. Ecrire l'inégalité des accroissement fini sur $[1; \sqrt{x}]$.
3. En déduire un encadrement de $f(x) - f(1)$.
4. En déduire un encadrement de $\frac{\ln(x)}{x}$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$

Proposition 1. *Règle de l'Hôpital.*
Soient $f, g : [a; b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a; b]$, dérivables sur $]a; b[$. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a; b[$ et que $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$. Alors $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = l$.

Exercice 15. Le but de cet exercice est de démontrer la règle de l'Hôpital.
1. Prouver que $\forall x \in]a; b[, g(x) \neq g(a)$ (raisonner par l'absurde).
2. Soit $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et $h : [a; b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(x) = f(x) - pg(x)$. A l'aide du théorème de Rolle, montrer que : $\exists c \in]a; b[$: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.
3. On suppose que $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$. Prouver que $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = l$.

Exercice 16. Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{\arccos x - \pi}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 17. Inégalité des accroissements finis.
Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est dérivable sur $]a; b[$ et que $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in]a; b[, |f'(x)| \leq M$.
1. Ecrire l'égalité des accroissements finis.
2. En déduire que $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.