Introduction aux suites numériques

Exercice 1. Soit (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n+5}{n+3}$.
1. Trouver un minorant et un majorant pour (u_n).
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

Exercice 2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n-5}{10n-24}$.
1. La suite est-elle bornée ?
2. La suite est-elle monotone ?

Exercice 3. Soit (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n+1}{2n+\sin n}$.
1. Prouver que (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$.
2. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \leq n_0, u_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$.
3. En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 4. On considère la suite définie par récurrence par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.
1. Prouver que (u_n) est minorée.
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

Exercice 5. Quelle est la différence entre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et u_n ?

Exercice 6. Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies par $u_n = \frac{(n-2)^2}{2}$, $v_n = (-1)^n$ et $w_n = u_n v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1. Représenter graphiquement ces trois suites.
2. Calculer v_0, v_2. Calculer v_{2p}.
3. Calculer v_1, v_3. Calculer v_{2p+1}.
4. Calculer w_{2p} et w_{2p+1}.

Exercice 7. 1. Rappeler la définition de la croissance d'une suite.
2. Donner deux critères permettant d'étudier la croissance d'une suite.

Exercice 8. Soient $u_n = (\frac{3}{2})^n$ et $v_n = (-2)^n$.
1. Prouver que (u_n) est croissante.
2. (v_n) est-elle croissante ? Décroissante ?
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. A quelle condition (a^n) est-elle croissante ? Décroissante ?

Exercice 9. Le produit de deux suites minorées est-il minoré ?

Exercice 10. Prouver qu'une suite réelle croissante est minorée.

Exercice 11. Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n+1}{2n^2+3}$.
1. Déterminer un majorant et un minorant de cette suite. La suite (u_n) est-elle bornée ?
2. Étudier la monotonie de (u_n).

Limites d'une suite numérique

Exercice 12. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{10}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1. Représenter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ graphiquement.
2. Soit $\epsilon = 1$. Trouver N_1 tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \Rightarrow -1 \leq u_n \leq 1$.
3. Soit $\epsilon = 0.1$. Trouver $N_{0.1}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_{0.1} \Rightarrow -0.1 \leq u_n \leq 0.1$.
4. Recommencer avec $\epsilon = 0.01$ puis avec ϵ quelconque.
5. Conclure.

Exercice 13. Étudier les limites des suites définies par :
1. $u_n = \frac{sin(n^2)}{n}$
2. $u_n = \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$.
3. $u_n = \frac{n^3+4n}{4n^3+2cos(n)-\frac{2}{n^2}}$
4. $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^n}$

Exercice 14. A l'aide d'un encadrement, montrer que la suite

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

est convergente et donner sa limite.

Exercice 15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$. En déduire le comportement de la suite de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Exercice 16. Trouver deux suites (u_n) et (v_n) qui tendent toutes les deux vers $+\infty$ telles que :
1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = +\infty$

Exercice 17. Trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que :
1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$

Exercice 18. Trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que :
1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = -\infty$

Exercice 19. Ou aimerait prouver que la suite $(\cos(n))$ n'a pas de limite. Supposons le contraire et appelons l la limite de cette suite.
1. Sans développer, donner la limite de la suite $(\cos(n+1))$.
2. Développer $\cos(n+1)$ à l'aide d'une formule de trigonométrie.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n)$.
4. Obtenir une contradiction à l'aide de l'égalité trouvée en 2. puis conclure.

Exemples remarquables

Exercice 20. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
1. Calculer $(1-a)(1+a+a^2+...+a^n)$.
2. En déduire une formule pour $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k$.

Exercice 21. (v_n) est une suite géométrique de raison a et de premier terme $v_0 \in \mathbb{R}$.
1. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer v_k en fonction de v_0 et de a.
2. Exprimer $v_0 + v_1 + ... + v_n$ en fonction de v_0 et de a.
3. A l'aide de l'exercice précédent, trouver une formule pour $v_0 + v_1 + ... + v_n$.

Exercice 22. On considère la suite où $a \in \mathbb{R}$.
1. Pour quelles valeurs de a cette suite converge-t-elle ?
2. Pour quelles valeurs de a cette suite diverge-t-elle vers $+\infty$?
3. Pour quelles valeurs de a cette suite n'a-t-elle pas de limite ?

Exercice 23. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$.
1. Trouver un réel l tel que la suite (v_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - l$ soit géométrique.
2. En déduire le comportement de (u_n).

Exercice 24. Expliciter et déterminer la limite de la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n\mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 5$.

Exercice 25. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ définie par $v_n = 0.123123...123$, où il y a n bloc "123" dans l'écriture décimale de v_n.
1. Donner l'écriture décimale de $\frac{123}{1000}$, $\frac{123}{1000000}$, $\frac{123}{1000000000}$, ...
2. Exprimer v_n comme somme des premiers termes d'une suite géométrique, dont précisera le premier terme et la raison.
3. Justifier que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ converge et donner sa limite.