Espaces vectoriels II

Définition d'un sous-espace vectoriel

Définition 1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F une partie de E ($F \subset E$). Alors F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si :*
- $0_E \in F$
- $\forall (u,v) \in F^2, u+v \in F$ *(stabilité par addition)*
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in F, \lambda.u \in F$ *(stabilité par multiplication par un scalaire)*

Proposition 1. *Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est un espace vectoriel.*

Exercice 1. Dans la définition 1. de quel + et de quel . s'agit-il ?

Exercice 2. Soit $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+2z=0\}$.
1. Dans quel espace vectoriel l'ensemble G est-il inclus ? On appelle E cet espace vectoriel.
2. Prouver que G est un sous-espace vectoriel de E.
3. Trouver un vecteur normal à tous les éléments de G (penser au produit scalaire).
4. Représenter graphiquement G.

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi ces parties de E, lesquelles sont des sous-espaces vectoriels de E ?
1. $F_1 = \{f \in E,\ f$ est de classe $\mathcal{C}^1\}$.
2. $F_2 = \{f \in F_1,\ f'(3) = 5\}$.
3. $F_3 = \{f \in F_1,\ 3f'(1) = f'(8) + f(-1)\}$.
4. $F_4 = \{f \in E,\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0\}$.
5. $F_5 = \{f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)\}$.
6. F_6 l'ensemble des applications de E qui sont bijectives.

Combinaisons linéaires et intersections d'espaces vectoriels

Exercice 4. Soit $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ deux vecteur de $\mathbb{R}^3$.
1. Donner un exemple de combinaison linéaire de i et de j.
2. Trouver un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de i et de j.
3. Quel est l'ensemble de toutes les combinaison linéaire de i et de j ? Le représenter.

Exercice 5. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
1. Prouver que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Illuster pour $E = \mathbb{R}^3$.

Exercice 6. Soient les vecteurs $a = (1,3,0)$ et $b = (2,1,1)$ dans $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer si les vecteurs suivants sont des combinaisons linéaires de a et b.
1. $u_1 = (1,1,1)$
2. $u_2 = (1,0,0)$
3. $u_3 = (0,1,1)$.
4. $u_4 = (1,-2,1)$.

Exercice 7. Soient les vecteurs $a = (-1,2,0)$ et $b = (1,1,1)$ dans $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer si les vecteurs suivants sont des combinaisons linéaires de a et b.
1. $u_1 = (-3,0,-2)$
2. $u_2 = (3,4,-2)$
3. $u_3 = (-1,8,2)$.
4. $u_4 = (1,2,3)$.

Exercice 8. Soient les fonctions $f_1 = \sin$ et $f_2 = \cos$ dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Les fonctions suivantes de E sont-elles des combinaisons linéaires de f_1 et f_2 ?
1. $g_1 = 0$.
2. $g_2(x) = 3\sin x + 2\cos x$.
3. $g_3(x) = \sin x \cos x$.
4. $g_4(x) = \cos(x+2)$.
5. $g_5(x) = x^3 \sin x + x \cos x$.

Exercice 9. Soient $E = \mathbb{R}^4$, $v_1 = (1,-1,0,0)$, $v_2 = (0,1,-1,0)$ et $v_3 = (0,0,1,-1)$.
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $u = (x,y,z,t)$ soit combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3.

Exercice 10. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs réelles). Les parties suivantes de E sont-elles des sous-espaces vectoriels ?
1. F_1 l'ensemble des suites (u_n) vérifiant $u_0 = 0$.
2. F_2 l'ensemble des suites convergentes.
3. F_3 l'ensemble des suites bornées.
4. $F_4 = F_1 \cup F_2$.
5. $F_5 = F_2 \cup F_3$.
6. $F_6 = F_1 \cap F_2$.
7. $F_7 = F_2 \cap F_3$.
8. $F_8 = E - F_1$.

Exercice 11. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X] = \{aX^2 + bX + c \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$. Soit $P_1 = (X-1)^2$, $P_2 = (X-2)^2$ et $P_3 = (X-3)^2$.
1. Prouver que P_1, P_2 et P_3 sont dans $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Prouver que X est combinaison linéaire de P_1, P_2 et P_3.
3. 1 et X^2 sont-ils combinaisons linéaires de P_1, P_2 et P_3 ?

Sommes, sous-espaces vectoriels engendrés

Définition 2. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme** de F et de G l'ensemble noté $F+G$ défini par $F+G = \{x+y \mid x \in F \text{ et } y \in G\}$. On a alors que :*
1. $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E
2. $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant F et G

Exercice 12. Soit $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. On considère F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par $F = \{\lambda.u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{\lambda.v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
1. Représenter graphiquement F et G.
2. Déterminer $F+G$.
3. A-t-on $F \oplus G$?

Définition 3. *Soit $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \ldots, \overrightarrow{x}_n$ des éléments d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On apelle espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \ldots, \overrightarrow{x}_n$, noté **Vect**$(\{\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \ldots, \overrightarrow{x}_n\})$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \ldots, \overrightarrow{x}_n$. Autrement dit,*

$$\overrightarrow{x} \in Vect(\{\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \ldots, \overrightarrow{x}_n\} \Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{x}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{x}_2 + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{x}_n$$

Exercice 13. Soit $E = \mathbb{R}^4$. Soient $u = \begin{pmatrix} 7 \\ -17 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $z = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ des éléments de E.
Le vecteur u appartient-il à $\mathrm{Vect}(\{v, w, z\})$?

Exercice 14. Soit $E = \mathbb{R}^3$. On considère les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (3, 2, 1)$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Trouver une condition sur x, y et z pour que (x, y, z) appartienne à $\mathrm{Vect}(\{u, v\})$.

Définition 4. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que :*
*1. F et G sont en **somme directe**, et l'on note $F \oplus G$, si $F \cap G = \{0_E\}$*
*2. F et G sont **supplémentaires** si $F \oplus G = E$*

Exercice 15. Les droites vectorielles engendrées par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-elles supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$? On pourra commencer par illustrer le problème.

Exercice 16. La droite vectorielle engendrée par $(1, 1, 0)$ et le plan xOy sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 17. On note E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $F = \{f \in E, f(1) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, puis en donner un espace vectoriel supplémentaire.

Exercice 18. On note E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $F = \left\{f \in E, \int_0^1 f(t)dt = 0\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, puis en donner un espace vectoriel supplémentaire.