Espaces vectoriels III

Familles libres, familles liées

Définition 1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(u_1, u_2, ..., u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est* ***libre*** *si :*

$$\forall(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

On dit que cette famille est ***liée*** *si ce n'est pas le cas, autrement dit, si :*

$$\exists(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \neq (0, 0, ..., 0), \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = 0$$

Exercice 1. Soit $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
1. Prouver que la famille (u_1, u_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter u_1 et u_2.

Exercice 2. Soit $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
1. Prouver que la famille (u_1, u_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter u_1 et u_2.

Exercice 3. Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1; 1]$ dans $\mathbb{R}$. Prouver que les familles suivantes sont libres :
1. $\{x \mapsto x^2, x \mapsto x^3\}$
2. $\{\text{arcin}, \text{arccos}\}$

Exercice 4. Pour quelle(s) valeur(s) de α la famille $(1, 1)$ et $(2, \alpha)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^2$? Une famille liée ?

Exercice 5. Prouver que la famille $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. Prouver que la famille $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7. Soit (u, v, w, t) une famille liée de $\mathbb{R}^4$. Prouver qu'au moins un des quatre vecteurs est combinaison linéaire des trois autres.

Exercice 8. Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Prouver que la famille (u, v) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9. Soit $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Prouver que la famille (u, v) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Prouver que la famille $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11. Donner une famille génératrice de l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solutions de $y'' + y' + y = 0$.

Exercice 12. Soit $r \in \mathbb{R}$. Trouver une famille génératrice de l'espace vectoriel des suites réelles de raison r. Cette famille est-elle libre ?

Exercice 13. Soit $\{u, v\}$ une famille génératrice d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Soit u' et v' deux autres vecteurs de E. On suppose que $u \in \text{Vect}(\{u', v'\})$ et $v \in \text{Vect}(\{u', v'\})$.
1. Que signifie $u \in \text{Vect}(\{u', v'\})$?
2. Prouver que $\{u', v'\}$ est une famille génératrice de E.

Bases

Définition 2. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit que la famille $(u_1, u_2, ..., u_3)$ est une base de E si cette famille est une famille libre est génératrice de E.*

Exercice 14. Prouver que $\{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15. Prouver que la famille $\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16. Prouver que $(1+X, 2+X^2, 1-X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Dimension d'un espace vectoriel

Définition 3. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit que E est de* ***dimension finie*** *si E admet une famille génératrice finie.*

Proposition 1. *Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors :*
- *E admet au moins une base*
- *toutes les bases de E ont le même cardinal (même nombre d'éléments)*

Le nombre d'éléments d'une base s'appelle la ***dimension*** *de E, noté $dim(E)$.*

Proposition 2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, ..., _3)$ une famille de vecteurs de E. Alors il y a équivalence entre :*
1. $\mathcal{F}$ est une base de E
2. $\mathcal{F}$ est une famille libre de E
3. $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E

Exercice 17. Soit $\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix}\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
1. Rappeler la dimension de $\mathbb{R}^3$.
2. Prouver que la famille de vecteurs ci-dessus est liée.

Exercice 18. Soit (e_1, e_2, e_3) une famille libre d'un espace vectoriel de dimension 3. Prouver que cette famille est génératrice.

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*
1. F est de dimension finie et $dim(F) \leq dim(E)$
2. $dim(F) = dim(E) \Leftrightarrow F = E$

Exercice 19. Soit (u, v, w) une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Prouver que cette famille est liée.

Théorème 2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :*

$$dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$$

Exercice 20. Soit $i = (1, 0)$ et $e = (1, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
1. Déterminer $F = \text{Vect}(i)$ et $G = \text{Vect}(e)$.
2. Déterminer $F + G$.

Exercice 21. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E définis par $F_1 = \text{Vect}(\{u_1, u_2, u_3\})$ et $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + 3z = 0\}$, où $u_1 = \begin{pmatrix}7\\2\\-1\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.
1. Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.
2. Déterminer une base de F_2.
3. Établir que $F_1 = F_2$.