Applications linéaires et espaces vectoriels

Applications linéaires en dimension finie

Définition 1. *Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et f une fonction linéaire de E dans F. On appelle rang de f, que l'on note* $\operatorname{rg} f$, *l'entier* $\dim \operatorname{Im} f$.

Théorème 1. *Théorème du rang. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f une fonction linéiar e de E dans F. Alors :* $\dim E = \dim \ker f + \operatorname{rg} f$.

Exercice 1. Soit f l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $(x, y, z) = (x - z, x + y, y + z)$. Déterminer le rang de f et la dimension de $\ker(f)$.

Exercice 2. Soit f l'application linéaire $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(P) = (P(0), P'(0), P''(0))$. Démontrer que f est un isomorphisme.

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^4$. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de E. Soit $F = \mathbb{R}^2$. On note (f_1, f_2) la base canonique de F. Soit $\phi : E \to F$ l'application linéaire telle que $\phi(e_1) = f_1 - f_2$, $\phi(e_2) = 2f_1 - f_2$, $\phi(e_3) = f_1 + 3f_2$ et $\phi(e_4) = f_2$.

1. Expliciter $\phi(a)$ pour $a = (x, y, z, t) \in E$.
2. Déterminer le rang de ϕ et la dimension du noyau de ϕ.
3. ϕ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 4. Soit $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto (x, -\frac{x}{2}) \end{array}$. On note (i, j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Prouver que f est linéaire.
2. Calculer, puis représenter $f(i)$ et $f(j)$.
3. Déterminer et représenter $\ker(f)$.
4. Déterminer et représenter $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 5. Soit $\begin{array}{lll} f: & \mathbb{R}_2[X] & \to \mathbb{R}^3 \\ & P(X) & \mapsto (P(1), P(\frac{1}{2}), P(2)) \end{array}$. On note (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Prouver que f est linéaire.
2. Déterminer $\ker(f)$.
3. Justifier que f est bijective.
4. Trouver trois polynômes P_1, P_2 et P_3 tels que $f(P_1) = i$, $f(P_2) = j$ et $f(P_3) = k$. Comment s'appellent ces trois polynômes ?

Matrice d'une application linéaire

Définition 2. *Soit $f : E \to F$ une fonction linéaire (E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels).*
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ une base de F. On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ la matrice :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \textit{où} \quad \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \quad \textit{est la colonne des coordonnées de } f(e_j) \textit{ dans la base } \mathcal{B}'.$$

Exercice 6. Soit f l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y, z) = (2x - z, x + y + z)$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}'$ celle de $\mathbb{R}^2$.

1. Donner $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
2. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 7. Expliciter l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dont la matrice relativement aux bases canoniques est $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \\ 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 8. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. on considère f le sous-espace vectoriel de E engendré par $f_1 = \sin$ et $f_2 = \cos$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ est une base de f.
2. Démontrer que l'application définie par $\phi(f) = f'$ est un endomorphisme de f. Donner sa matrice relativement à $\mathcal{B}$. ϕ est-elle bijective ?
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $k(x) = x + \alpha$. Soit ψ l'application définie sur f par $\psi(f) = f \circ k$. Démontrer que ψ est un endomorphisme de f. Exprimer sa matrice relativement à $\mathcal{B}$. ψ est-elle bijective ?
4. Pour quel α a-t-on $\phi + \psi$ bijective ?

Exercice 9. Soit la fonction linéaire $\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto (x+3y, -x+z) \end{array}$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Préciser ce qu'est $\mathcal{B}$. Calculer les images des vecteurs de cette base.
2. Déterminer $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
3. Soit $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Calculer $f(u)$ à l'aide de A.

Exercice 10. Soit la fonction linéaire $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On donne $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

1. Déterminer p et n.
2. Donner l'expression de g.
3. Calculer $g\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. On reprend les fonctions f et g des deux exercices précédents.

1. $g \circ f$ est-elle définie ? Si oui, préciser son ensemble d'arrivée, son ensemble de départ, ainsi que sa matrice relativement aux bases canoniques.
2. Mêmes question pour $f \circ g$.

Propriétés d'une application linéaire

Exercice 12. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. On note O le point de coordonnées $(0;0)$. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 3 et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$. On note $f = h \circ r$. f s'appelle similitude directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

1. Ecrire les matrices associées aux applications h et r.
2. Déterminer les matrices des applications f et $r \circ h$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Conclure.
3. Vérifier que f est inversible et déterminer la matrice assocée à son application inverse.

Exercice 13. Soit $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x_x - x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_3 \end{pmatrix} \end{array}$

1. Prouver que f est linéaire.
2. Donner la matrice de f relativement aux bases canoniques.
3. Vérifier que l'inverse de la matrice trouvée à la question précédentes est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
4. Résoudre $AX =^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14. On considère la matrice $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1.a. De quelle fonction $M(\theta)$ est-elle la matrice relativement à $\mathcal{B}$?
1.b. En déduire $M(\theta)^{-1}$.
2. Verifier le résultat obtenu en 1.b. en calculant $M(\theta)^{-1}$ à l'aide d'une autre méthode.

Exercice 15. Soit $\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z) & \mapsto (x+y-z, 2x+2y-z, z+y, -3z-3y) \end{array}$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Quelle est le rang de f ?

Exercice 16. Soit $\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f - 3f' \end{array}$.

1. Que signifie $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
2. Justifier que f est linéaire.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.