Produit scalaire canonique et géométrie

Définition 1. *On appelle* ***produit scalaire canonique*** *de* $\mathbb{R}^n$ *la fonction:*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) & \mapsto & <\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}> = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{array}$$

où $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{R}^2$, que l'on munit de son produit scalaire canonique, noté $< .,. >$. Soit $\overrightarrow{X}$ et $\overrightarrow{Y} \in \mathbb{R}^2$.
1. Prouver que $< .,. >$ est *symétrique*:

$$\forall(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, <\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}> = <\overrightarrow{Y}, \overrightarrow{X}>$$

2. Prouver que $< .,. >$ est *linéaire à gauche*:

$$\forall(\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{Y}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, <\overrightarrow{\lambda X_1 + \mu X_2}, \overrightarrow{Y}> = \lambda <\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{Y}> + \mu <\overrightarrow{X_2}, \overrightarrow{Y}>$$

3. Prouver que $< .,. >$ est *linéaire à droite*.
4. Prouver que $< .,. >$ est *positive*:

$$\forall \overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^2, <\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}> \geqslant 0$$

5. Prouver que $< .,. >$ est *définie*:

$$\forall \overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^2, <\overrightarrow{X}, \overrightarrow{X}> = 0 \Rightarrow X = \overrightarrow{0}$$

Exercice 2. Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, |<\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}>| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|_2 \|\overrightarrow{v}\|_2$$

On rappelle que $\overrightarrow{u} \mapsto <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}>$ et $\overrightarrow{v} \mapsto <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}>$ sont linéaires.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

1. Prouver que $P(t) = \|\overrightarrow{u} + t.\overrightarrow{v}\|_2^2$ est un polynôme de degré 2 en t.
2. Calculer le discriminant Δ de ce polynôme.
3. a. Justifier que $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) \geqslant 0$.
3. b. En déduire le signe de Δ.
4. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. En déduire que:

$$\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \exists\theta \in \mathbb{R} : <\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}> = \|\overrightarrow{u}\|_2 \|\overrightarrow{v}\|_2 \cos(\theta)$$

Remarque: on peut prouver que $\theta = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.

Exercice 3. Soit A, B et C trois points distincts du plan. On note $\theta = \widehat{BAC}$. On note H le projeté orthogonal de B sur (AC).

1. Faire une figure telle que $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$.
2. Exprimer $\cos(\theta)$ en fonction de $\|\overrightarrow{AH}\|_2$ et $\|\overrightarrow{AB}\|_2$.
3. En déduire une expression de $\|\overrightarrow{AH}\|_2$ en fonction de $<\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}>$ et $\|\overrightarrow{AC}\|_2$.
4. Exprimer $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\|\overrightarrow{AH}\|_2$, $\overrightarrow{AC}$ et $\|\overrightarrow{AC}\|_2$. Indication: $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AC}$.

Remarque: on peut prouver que la formule qui vient d'être retrouvée fonctionne pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

5. Application: déterminer le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AB}$ sur $\overrightarrow{AC}$ pour les points $A(0;0)$, $B(2;2)$ et $C(2;1)$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + bx + c = 0$, $M(x, y)$ un point de $\mathcal{D}$ et $A(x_A; y_A)$ un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. On note $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$ et C le point du plan tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{n}$.
On appelle distance de A à $\mathcal{D}$ le nombre $d(A, \mathcal{D}) := \|\overrightarrow{AH}\|_2$.

1. Faire une figure illustrant la situation.
2. Justifier que $\overrightarrow{AH}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AM}$ sur (AC).
3. En utilisant l'exercice précédent, calculer $\overrightarrow{AH}$.
4. En déduire $d(A, \mathcal{D})$.
5. Application: determiner la distance du point $A(2; 3)$ à la première bissectrice.

Exercice 5. Trouver la formule donnant la distance d'un point à un plan dans $\mathbb{R}^3$.