Géométrie III

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{R}^3$. Soit M_0 un point de $\mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par M_0 et dirigée par $\overrightarrow{u}$. Soit A un autre point de $\mathbb{R}^3$ et H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$.

1. Faire une figure.

On sait que:

$$\exists! \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{M_0H} = \lambda \overrightarrow{u}$$

Le but de ce qui suit est de trouver une formule simple permettant de calculer le réel λ en fonction de A, M_0 et $\overrightarrow{u}$. Le réel λ n'est rien d'autre que la coordonnée de H dans le repère $(M_0, \overrightarrow{u})$.

2. Grâce à une relation de Chasles dans le triangle M_0AH, exprimer $\overrightarrow{M_0A}.\overrightarrow{u}$ en fonction de λ et $\|\overrightarrow{u}\|_2^2$.
3. En déduire l'expression de λ recherchée.
4. La formule trouvée à la question précédente est-elle valable sur $\mathbb{R}^2$? Sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 2. Application de l'exercice précédent.
On se place dans $\mathbb{R}^2$. On note $\overrightarrow{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les uniques réels λ et μ tels que $\overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{e}_1 + \mu \overrightarrow{e}_2$.

λ et μ s'appellent les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$.

Exercice 3. On se place dans $\mathbb{R}^3$. Grâce à l'exercice 1, retrouver la formule qui donne la distance entre un point et un plan dont on connaît une équation cartésienne.

Exercice 4. Soient A et M_0 deux points de $\mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par M_0 et dirigiée par $\overrightarrow{u}$.
1. Justifier que

$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{M_0A} \wedge \overrightarrow{u}\|_2}{\|\overrightarrow{u}\|_2}$$

2. Cette formule est-elle valable sur $\mathbb{R}^2$? Sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 5. Soient A et M_0 deux points de $\mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{D}$ la droite passant par M_0 et dirigiée par $\overrightarrow{u}$. On considère un point $M_t \in \mathcal{D}$ où t est l'unique réel tel que $\overrightarrow{M_0M_t} = t\overrightarrow{u}$. On définit $f(t) = \|\overrightarrow{AM_t}\|_2^2$.

1. Trouver des réels a, b et c tels que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = at^2 + bt + c$.
2. Calculer $f'(t)$.
3. En déduire la valeur $t_{\min}$ telle que $f(t_{\min})$ soit minimale.
4. Justifier que $\|\overrightarrow{AM_t}\|_2$ est minimale si, et seulement si, $\|\overrightarrow{AM_t}\|_2^2$ est minimale.
5. Donner une expression pour $\|\overrightarrow{AM_{t_{\min}}}\|_2$. Quel est le lien avec $d(A, \mathcal{D})$?

Exercice 6. Distance entre deux droites de l'espace ($\mathbb{R}^3$).

1. Quelle signification donner à la distance entre deux droites sécantes de l'espace?
2. Quelle signification donner à la distance entre deux droites parallèles de l'espace?

Soient M_1 et M_2 deux points de $\mathbb{R}^3$ et $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On considère $\mathcal{D}_1$ (respectivement $\mathcal{D}_2$) la droite passant par M_1 (resp. M_2) et dirigée par $\overrightarrow{u}_1$ (resp. $\overrightarrow{u}_2$).

3. A quelle condition sur $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles non coplanaires? (Une figure peut aider).

On suppose que la condition ci-dessus est vérifiée.

4. A l'aide d'un produit vectoriel, donner un vecteur $\overrightarrow{n}$, orthogonal à $\overrightarrow{u}_1$ et orthogonal à $\overrightarrow{u}_2$.

On note:

- $\mathcal{P}_1$ le plan de paramétrage $(t, t') \mapsto M_1 + t\overrightarrow{u}_1 + t'\overrightarrow{n}$
- $\mathcal{P}_2$ le plan de paramétrage $(t, t') \mapsto M_2 + t\overrightarrow{u}_2 + t'\overrightarrow{n}$

5. a. Justifier que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{D}_2$ est réduite à un point. On note H_1 ce point.
5. b. Justifier que $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{D}_1$ est réduite à un point. On note H_2 ce point.

La distance entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est définie par le nombre $d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \|\overrightarrow{H_1H_2}\|_2$.

6. Jutifier que $\overrightarrow{M_1M_2}.\overrightarrow{n} = \overrightarrow{H_2H_1}.\overrightarrow{n}$.
7. Exprimer $\|\overrightarrow{H_1H_2}\|_2$ en fonction de $|\overrightarrow{H_2H_1}.\overrightarrow{n}|$ et de $\|\overrightarrow{n}\|_2$, puis en fonction de $|\overrightarrow{M_1M_2}.\overrightarrow{n}|$ et de $\|\overrightarrow{n}\|_2$
8. En déduire que $d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2}.(\overrightarrow{u}_1 \wedge \overrightarrow{u}_2)|}{\|\overrightarrow{u}_1 \wedge \overrightarrow{u}_2\|_2}$.

Exercice 7. On se place dans $\mathbb{R}^3$. On considère les points $A(1; -2; 0)$ et $B(-1; 0; -\frac{1}{2})$. On considère également les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ définies par les paramétrages:

$$\mathcal{D}_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 - 2t \\ y & = & t \\ z & = & 1 \end{array} \right. , \mathcal{D}_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & -1 - 2t \\ z & = & -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z + 1 = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x - y + z - 1 = 0$.

1. Calculer $d(A, \mathcal{P}_1)$ et $d(B, \mathcal{P}_2)$.
2. Calculer $d(B, \mathcal{D}_1)$.
3. Calculer $d(B, \mathcal{D}_2)$.

On note $\mathcal{D}_3 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

4. Calculer $d(A, \mathcal{D}_3)$.
5. Calculer $d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$.