TRAVAUX DE GROUPES - ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINEAIRES

Traiter quatres exercices parmi les cinq.
Les réponses seront soigneusement justifiées.
Un compte rendu par groupe, deux questions au professeur par groupe.

Définition 1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une famille de vecteurs de E. On appelle* **rang** *de la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ la dimension de l'espace engendré par $(x_1, x_2, ..., x_n)$. On le note : $rg(x_1, x_2, ..., x_n) = \dim Vect(x_1, x_2, ..., x_n)$.*

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_3 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_4 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}_5 = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$.

On choisiera la convention suivante pour tracer les repères :
- l'axe (Ox) est horizontal et orienté vers la droite
- l'axe (Oy) est vertical et orienté vers le haut
- l'axe (Oz) est est orienté “vers l'avant”

1.a. Dans un repère tracer Vect $\{\overrightarrow{u}_1\}$.
1.b. Donner une équation de l'espace obtenu.
1.c. Déterminer rg $\{\overrightarrow{u}_1\}$.

2. Mêmes questions avec Vect $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$ et Vect $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_4\}$.
3. Déterminer Vect $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$ ainsi que rg $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$. Que dire du rôle de $\overrightarrow{u}_3$ dans cette affaire ?
4. Déterminer Vect $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_5\}$
5. Quel ensemble de 3 vecteurs choisir pour engendré $\mathbb{R}^3$?

Définition 2. *Le rang d'une matrice est le rang de ses vecteurs colonnes.*

Proposition 1. *On ne change pas le rang d'une matrice en effectuant les opérations autorisées pour la méthode du pivot de Gauss.*

Exercice 2

Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 3. *Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et f une fonction linéaire de E dans F. On appelle rang de f, que l'on note $\operatorname{rg} f$, l'entier $\dim \operatorname{Im} f$.*

Exercice 3

Soit $f : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x, -\frac{x}{2}) \end{array}$. On note (i, j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Prouver que f est linéaire.
2. Calculer, puis représenter $f(i)$ et $f(j)$.
3. Déterminer et représenter $\ker(f)$.
4. Déterminer et représenter $\operatorname{Im}(f)$. En déduire $\operatorname{rg}(f)$.
5. Vérifier que $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \ker f + \operatorname{rg}(f)$.

Définition 4. *Soit $f : E \to F$ une fonction linéaire (E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels). Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ une base de F. On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ la matrice :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ où } \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \text{ est la colonne des coordonnées de } f(e_j) \text{ dans la base } \mathcal{B}'.$$

Proposition 2. *Avec les notations de la définition précédente, si X est la colonne des coordonnées de $\overrightarrow{x} \in E$ dans $\mathcal{B}$, alors les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ de $f(\overrightarrow{x})$ sont données par la colonne $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \times X$.*

Exercice 4

Soit la fonction linéaire $\begin{array}{llll} f : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^4 \\ & (x,y) & \mapsto (x+y, y, 2x, 3x+y) \end{array}$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Préciser ce que sont $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
2. Calculer les images des vecteurs de $\mathcal{B}$.
3. Déterminer $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
4. Soit $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer $f(u)$ à l'aide de A.

Exercice 5

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. On note O le point de coordonnées $(0;0)$. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 3 et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$. On note $f = h \circ r$. f s'appelle similitude directe de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$. On admet que r et h sont linéaires. On note $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer $h(\overrightarrow{i})$ et $h(\overrightarrow{j})$. En déduire $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(h)$.
2. Déterminer $r(\overrightarrow{i})$ et $r(\overrightarrow{j})$. En déduire $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(r)$.
3. Déterminer $f(\overrightarrow{i})$ et $f(\overrightarrow{j})$. En déduire $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.
4. Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(r \circ h)$. On rappelle que si f et g sont 2 endomorphismes de E, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$
5. Vérifier que f est inversible et déterminer la matrice associée à son application inverse. On rappelle que f est bijective si, et seulement si, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible et que, dans ce cas, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$.