IngéSup - TG 6 - Suites récurrentes, points fixes et applications

Traiter les cinq exercices.
Les réponses seront soigneusement justifiées.
Un compte rendu par groupe.

Définition
On dit que $f : I \to I$ est contractante s'il existe un réel $k < 1$ tel que $\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$.

Exercice 1

1. Représenter graphiquement les fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto k|x|$, $x \mapsto k|x-a|$ et $x \mapsto k|x-a|+b$, où k est un réel non nul différent de 1, a et b sont deux réels non nuls.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction contractante avec $k = \frac{1}{2}$. Interpréter graphiquement le fait que f est une fonction contractante.

Théorème du point fixe
Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une fonction contractante. Alors :

1. f a un unique point fixe, que l'on note α
2. toute suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers cet unique point fixe
3. pour une telle suite, on a les inégalités :
   (a) $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$
   (b) $|u_n - \alpha| \leq \frac{k}{1-k} |u_n - u_{n-1}|$

Exercice 2 - Preuve du théorème du point fixe
Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une fonction contractante.
On admet l'existence d'un point fixe pour f. Soit (u_n) une suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Prouver que f a au plus un point fixe. On pourra raisonner par l'absurde.
2. Prouver que $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$.
3. Prouver que (u_n) converge vers α.

Remarque
On peut toujour transformer un problème du type $f(x) = 0$ en un problème de point fixe $\phi(x) = x$.
Par exemple :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow f(x) + x = x \\ &\Leftrightarrow \phi(x) = x \end{aligned} \qquad \text{avec } \phi(x) = f(x) + x,$$

ou encore :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow f(x) + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow xf(x) + x = x \\ &\Leftrightarrow \phi(x) = x \end{aligned} \qquad \text{avec } \phi(x) = xf(x) + x.$$

Lorsque l'on transforme le problème, on cherche une fonction ϕ contractante.

Exercice 3 - Condition nécessaire de convergence vers un point fixe
Soit $f : I \to I$ une fonction de classe C^1 admettant $\alpha \in I$ pour point fixe.
Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I \backslash \{\alpha\} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
Le but de l'exercice est de prouver que si (u_n) converge vers α, alors $|f'(\alpha)| \leq 1$.
On suppose que (u_n) converge vers α.

1. Cas $f'(\alpha) > 0$
   (a) Justifier que (u_n) est monotone à partir d'un certain rang.
   (b) Prouver que $0 \leq \frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha} \leq 1$.
   (c) Conclure.
2. Cas $f'(\alpha) < 0$. On note $g = f \circ f$.
   (a) Justifier que (u_{2n}) est monotone à partir d'un certain rang.
   (b) Prouver que $0 \leq \frac{g(u_{2n})-g(\alpha)}{u_{2n}-\alpha} \leq 1$.
   (c) En déduire un majorant de $|g'(\alpha)|$.
   (d) Exprimer $g'(\alpha)$ en fonction de $f'(\alpha)$.
   (e) En déduire un majorant de $|f'(\alpha)|$.
3. Donner la contraposée de la proposition démontrée.

Exercice 4
Soit ϕ_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi_1(x) = x^2 - 2 + x$.

1. Déterminer le(s) point(s) fixe(s) de ϕ_1.
2. Prouver que la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \phi_1(u_n) \end{cases}$ ne peut pas converger (utiliser la proposition prouvée à l'exercice précédent).

Exercice 5
On considère la fonction ϕ définie sur $]0, +\infty[$ par $\phi(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.

1. Etudier les variations de ϕ.
2. Prouver que $[1; 2]$ est stable par ϕ.
3. Soit $(x, y) \in [1; 2]^2$.
   (a) Ecrire l'égalité des accroissements finis sur l'intervalle $[x; y]$.
   (b) Majorer $|\phi'|$ sur l'intervalle $[1; 2]$.
   (c) Justifier que ϕ est contractante sur $[1; 2]$. Préciser k.
4. Déterminer l'unique point fixe α de ϕ dans $[1; 2]$.

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \phi(u_n) \end{cases}$.

5. Grâce au 3.(a) du théorème du point fixe, déterminer le rang à partir duquel $|u_n - \alpha| \leq 10^{-n}$.

Exercice bonus
Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} \end{cases}$.

1. Ecrire en langage Python une fonction permettant de calculer u_n.
2. Ecrire une fonction permettant de calculer le point fixe de ϕ avec une pécision donnée.