Equations différentielles non linéaires

Equations de Bernoulli

Définition 1. *Une équation de Bernoulli est une équation différentielle de la forme*

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) + c(t)y^{\alpha}(t) = 0 \text{ , où } \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$$

On peut alors résoudre cette équation en posant $z(t) = y^{1-\alpha}(t)$.

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle $xy' + y = y^2x^2$.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle $xy' + y - xy^3 = 0$.

Exercice 3. Prouver que le changement de variable proposé dans la définition fonctionne.

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :
1. $xy' + y = y^2 \ln(x)$
2. $y - \frac{x}{2}y' = \sqrt{y}$
3. $y' - y = xy^6$

Equations de Riccati

Définition 2. *Une équation de Riccati est une équation différentielle de la forme*

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) + c(t)y^2(t) + d(t) = 0$$

où les fonctions a, b, c *et* d *sont des fonctions continues sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$, *sur lequel* a *ne s'annule pas.*
Si on connaît une solution particulière y_0, *on peut se ramener à une équation de Bernoulli en posant* $Y = y - y_0$.

Exercice 5. On considère l'équation différentielle $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ (E).
1. Vérifier que $y_0(x) = \frac{1}{x}$ est une solution particulière de (E).
2. Résoudre (E).

Exercice 6. Résoudre $y' + \frac{y}{x} - y^2 + \frac{1}{x^2} = 0$

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles suivantes :
1. $x^3y' + y^2 + yx^2 + 2x^4 = 0$ (chercher une solution particulère de la forme $y_0(x) = ax^{\alpha}$)
2. $(y' - y^2)\cos(x) + y(2\cos^2(x) + \sin(x)) = \cos^3(x)$
3. $(x^2 + 1)y' = y^2 - 1$

Exercice 8. Prouver que la méthode proposée dans la définition fonctionne.