# Transformation de Laplace

**Rappel 1.** On appelle transformée de Laplace de $f : [0; +\infty[ \to \mathbb{R}$, que l'on note $\mathcal{L}(f)$ ou encore $F$, la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall p \in \mathbb{C}, F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

**Exercice 1.** Déterminer la transformée de Laplace de $f$, où $f$ est définie sur $[0 : +\infty[$ par :

1. $f(t) = 1$
2. $f(t) = t$
3. $f(t) = e^{-at}$
4. $f(t) = \sin(\omega t)$
5. $f(t) = \cos(\omega t)$

**Exercice 2.** Déterminer les transformées de Laplace suivantes :

1. $\mathcal{L}\big[(t^2 + t - e^{-3t})\mathcal{U}(t)\big]$
2. $\mathcal{L}\big[(t+1)e^{-2t}\mathcal{U}(t)\big]$

$\mathcal{U}$ est la fonction qui vaut 0 sur $]-\infty; 0[$ et 1 sur $[0; +\infty[$ et s'appelle *échelon de Heaviside.*

**Exercice 3.** Déterminer les originaux suivants :

1. $\mathcal{L}^{-1}\big[\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\big]$
2. $\mathcal{L}^{-1}\big[\frac{3}{(p+5)^2}\big]$
3. $\mathcal{L}^{-1}\big[\frac{p-1}{(p^2+2p+5)}\big]$
4. $\mathcal{L}^{-1}\big[\frac{3}{p+2} - \frac{1}{p^3}\big]$
5. $\mathcal{L}^{-1}\big[\frac{-2}{(p+3)^2}\big]$
6. $\mathcal{L}^{-1}\big[\frac{5}{(p+3)(p^2+3p+5)}\big]$

**Exercice 4.** Résoudre les équation différentielles suivantes sur $[0; +\infty[$ :

1. $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$ avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$.
2. $x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = e^{-2t}$ avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.
3. $x''(t) - x(t) = 3e^{-2t} + t^2 + 1$ avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.
4. $x''(t) - 4x(t) = 3e^{-t} - t^2$ avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$.
5. $x''(t) + x(t) = e^t \cos(t)$ avec $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$.

**Exercice 5.** Soient $f$ et $\mathcal{U}$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $\mathcal{U}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

1. Tracer le graphe de $f$.
2. Tracer le graphe de $f \times \mathcal{U}$.
3. Que dire de $\mathcal{L}(f)$ et $\mathcal{L}(f\mathcal{U})$ ?

C'est pourquoi il est préférable de multiplier systématiquement par $\mathcal{U}$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dont on calcule les transformées de Laplace. La fonction $\mathcal{U}$ présente d'autres intérêts.

4. Tracer le graphe de $x \mapsto f(t-2)\mathcal{U}(t-2)$. Comment qualifier cette transformation ?
5. Tracer le graphe de $x \mapsto f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$, ou $a$ est un réel positif.
6. Trouver une expression pour $\mathcal{L}(f(t-a)\mathcal{U}(t-a))$ en fonctino de $\mathcal{L}(f\mathcal{U})$, à l'aide du changement de variable $t' = t - a$.

Ce résultat est très utile dans le calcul de transformées de Laplace.

**Exercice 6.** Déterminer les transformées de Laplace suivantes :

1. $(t+5)\mathcal{U}(t)$
2. $(t+3)\mathcal{U}(t-2)$
3. $\mathcal{L}\big[(t+2)\mathcal{U}(t) + (t+3)\mathcal{U}(t-2)\big]$

**Exercice 7.** Résoudre, à l'aide de la transformation de Laplace, l'équation diffdérentielle :

$$y''(t) + y(t) = \mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-2)$$

**Exercice 8.** Déterminer les transformées de Laplace suivantes :

1. $\mathcal{L}\big[\cos(t)e^{-t}\mathcal{U}(t)\big]$
2. $\mathcal{L}\big[(5t)^2e^{-5t}\mathcal{U}(t)\big]$
3. $\mathcal{L}\big[(\cos(2t) - \sin(t))e^{-3t}\mathcal{U}(t)\big]$
4. $\mathcal{L}\big[(t^2 + t + 1)e^{-2t}\mathcal{U}(t)\big]$