Séries de Fourier

Coefficients de Fourier

Définition 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $2\pi-$périodique continue par morceaux. On définit les coefficients de Fourier par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

Exercice 1. Tracer le graphe, puis calculer les coefficients de Fourier des fonctions 2π-périodiques, définies sur $\mathbb{R}$ par les formules suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\pi;0] \\ x \text{ si } x \in]0;\pi] \end{cases}$

2. $f(x) = \max(0, \sin(x))$ si $x \in \mathbb{R}$

3. $f(t) = \begin{cases} -1 \text{ si } t \in]-\pi;0[\\ 1 \text{ si } t \in]0;\pi[\\ 0 \text{ si } t \in \{-\pi, 0\} \end{cases}$

Exercice 2. Soit f une fonction continue par morceaux, 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$. On note a_n et b_n ($\forall n \in \mathbb{N}$), ses coefficients de Fourier.
1. On suppose que f est paire. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 0$.
2. On suppose que f est impaire. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$.

Polynômes trigonométriques, séries de Fourier, interprétation

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions $2\pi-$périodiques et continues par morceaux. On note $< f|g >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$
. 1. Prouver que $< g|f >= \overline{< f|g >}$ (on dit que $< .,. >$ est hermitienne).
2. Prouver que $< f|\lambda g + \mu h >= \lambda < f|g > + \mu < f|h >$, où λ et μ sont 2 complexes (on dit que $< .,. >$ est linéaire à droite).
3. Prouver que $< f|f > \geq 0$ (on dit que $< .,. >$ est positive).
4. A-t-on $< f|f >= 0 \Rightarrow f = 0$?
On dit que $< .,. >$ est un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions $2\pi-$périodiques continues par morceaux.

Exercice 4. On considère $< .,. >$, le produit scalaire définit dans l'exercice précédent. On note, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $e_n(t) = e^{int}$.
1. Pour $m \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{C}$, calculer $< e_m, e_n >$.
2. Comment qualifier la famille $(..., e_{-n}, ..., e_{-1}, e_0, e_1, ..., e_n, ...)$?
3. Exprimer le coefficient de Fourier $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$ à l'aide de $< .,. >$.

Exercice 5. On appelle polynôme trigonométrique une fonction du type $g(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda_k \cos(nx) + \mu_k \cos(kx)\right)$
1. Prouver que g est 2π-périodique.
Soit m un entier non nul.
2. Calculer $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(mx)dx$.
3. Calculer $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(mx)dx$.

Exercice 6. Pour définir une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, il suffit d'en donner une expression sur un intervalle de longueur 2π (pourquoi ?)
On considère la fonction f, 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in]-\pi;\pi], f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.
1. Tracer le graphe de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Donner la série de Fourier de f.
4. Comparer les valeurs de f et de sa série de Fourier en $x = \pi$.

Exercice 7. Déterminer la série de Fourier de $x \mapsto x - E(x)$.

Théorèmes de convergences

Théorème 1. *Théorème de Parseval.*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $2\pi-$périodique et continue par morceaux. On à alors la formule de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t))^2dt = \frac{a_0^2(f)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(f)+b_n^2(f)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2$$

Théorème 2. *Théorème de Dirichlet.*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $2\pi-$périodique $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier en x est une série numérique convergente. De plus, si f est continue en x,

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\Big) = f(x)$$

et sinon,

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\Big) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$$

Exercice 8. On considère la fonction 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$, par $\forall x \in [-\pi;\pi], f(x) = |x|$.
1. Tracer le graphe de f.
2. Déterminer ses coefficients de Fourier.
3. Justifier que f coïncide avec sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$
5. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

Exercice 9. Soit f une fonction 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\begin{cases}\forall x \in]-\pi;0[, f(x) = -1\\ \forall x \in]0;\pi[, f(x) = 1\end{cases}$
1. Tracer le graphe d'une telle fonction.
2. Déterminer ses coefficients de Fourier ainsi que sa série de Fourier.
3. Appliquer le théorème de Dirichlet à cette fonction.

Exercice 10. On considère la fonction 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^2$ si $t \in [-\pi;\pi]$.
1. Tracer le graphe de f.
2. Déterminer la série de Fourier de f et appliquer le théorème de Dirichlet.
3. En prenant $t = \pi$, retrouver un résultat connu.

Exercice 11. Pour chacune des fonctions suivantes :
— tracer le graphe de f
— calculer les coefficients de Fourier (réels) de f
— en déduire les sommes demandées

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi-$périodique, paire, telle $\forall x \in [0,\pi], f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi-$périodique, impaire, telle $\forall x \in [0,\pi], f(x) = x(\pi - x)$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi-$périodique, telle $\forall x \in]-\pi,\pi], f(x) = \sin(\frac{x}{2})$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{16n^2+16n+3}$.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi-$périodique, telle $\forall x \in [-\pi,\pi], f(x) = \cosh(\lambda x)$ (λ est un réel strictement positif donné). En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\lambda^2+n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda^2+n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2}$.
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = sup(0,\sin(x))$. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.

Fonction T-périodiques

Exercice 12. Soit f une fonction T-périodique continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On pose $g(x) = f(\frac{T}{2\pi}x)$.
1. Prouver que g est $2\pi-$périodiques.
2. Trouver α tel que $f(x) = g(\alpha x)$. 3. Dans les formules des coeficients de Fourier de g effectuer le changement de variable $x = \alpha x'$. Les formules ainsi obtenues sont cells des coefficients de Fourier pour une fonction T-périodique.