Séries de Fourier II

Restrictions de fonctions

Définition 1. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit I un intervalle inclus dans E. On appelle* ***restriction*** *de f à I, que l'on note $f_{|_I}$, la fonction définie par* $\begin{array}{rcl} f_{|_I} : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$

Exercice 1. On considère les fonctions $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$, $\begin{array}{rcl} g : [0; +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$, $\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} i : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$.

1. Tracer les graphes de :

a. $f_{|_{]-\infty;0[}}$
b. $f_{|_{[-1;1[}}$
c. $g_{|_{]0;1]}}$
d. $h_{|_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}}$
e. $i_{|_{]-1;1[}}$
f. $i_{|_{[0;+\infty[}}$

2. g est-elle C^0 ? C^1 ?
3. Donner une restriction de g qui est C^1.
4. i est-elle C^0 ? C^1 ?
5. $i_{|_{[-1;0]}}$ est-elle C^1 ?
6. Donner une autre restriction de i qui est C^1.

Exercice 2. On considère la fonction $\begin{array}{rcl} f :]0; 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+1 \end{array}$. 1. Tracer le graphe de f.
2. Existe-t-il une fonction g, C^0, définie sur $[0; 1]$ telle que $f = g_{|_{]0;1[}}$?
3. Même question avec C^1.

Exercice 3. On considère la fonction $\begin{array}{rcl} f :]-1; 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$. 1. Tracer le graphe de f.
2. Existe-t-il une fonction g, C^0, définie sur $[-1; 1]$ telle que $f = g_{|_{]-1;1[}}$?
3. Même question avec C^1.

Exercice 4. On considère la fonction $\begin{array}{rcl} f :]-1; 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1-x^2} \end{array}$. 1. Tracer le graphe de f.
2. Existe-t-il une fonction g, C^0, définie sur $[-1; 1]$ telle que $f = g_{|_{]-1;1[}}$?
3. Même question avec C^1.

Exercice 5. On considère la fonction $\begin{array}{rcl} f :]0; 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1-x} \end{array}$. 1. Tracer le graphe de f.
2. Existe-t-il une fonction g, C^0, définie sur $[0; 1]$ telle que $f = g_{|_{]0;1[}}$?
3. Même question avec C^1.

Fonctions C^0 et C^1 par morceaux

Définition 2. *Soit $[a; b]$ un intervalle. On appelle subdivision de $[a; b]$ une suite finie de réels $a_0 < a_1 < ... < a_n$ telle que $a_0 = a$ et $a_n = b$.*
Une telle subdivision a $n+1$ éléments.

Exercice 6. 1. Donner un exemple de subdivision de l'intervalle $[0; 1]$. Préciser son nombre d'éléments.
2. Donner un exemple de subdivision de l'intervalle $[-\pi; \pi]$. Préciser son nombre d'éléments.
3. Donner une subdivision à 6 éléments de l'intervalle $[0; 10]$.

Exercice 7. Donner la subdivision à $n+1$ éléments de l'intervalle $[0; 1]$, telle que la distance entre deux éléments consécutifs est constante.

Définition 3. *Soit $[a; b]$ un intervalle et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est C^0 par morceaux sur $[a; b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ telle que $f_{|_{]a_i;a_{i+1}[}}$ est la restrcition d'une fonction C^0 sur $[a_i; a_{i+1}]$, pour i allant de 0 à $n-1$.*

Exercice 8. On considère la fonction f définie sur $[-1; 2]$ par $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } -1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 1 \\ x^2 - 1 \text{ si } 1 < x < 2 \\ -1 \text{ si } x = 2 \end{cases}$.

1. Tracer le graphe de f.
2. Prouver que f est C^0 par morceaux.
3. f est-elle C^1 par morceaux ?

Exercice 9. On considère la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.
1. Tracer le graphe de f.
2. f est-elle C^0 par morceaux ?

Définition 4. *Soit $[a;b]$ un intervalle et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est C^1 par morceaux sur $[a;b]$ s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ telle que $f_{|]a_i;a_{i+1}[}$ est la restrcition d'une fonction C^1 sur $[a_i;a_{i+1}]$, pour i allant de 0 à $n-1$.*

Exercice 10. On considère la fonction f paire définie sur $[-2;2]$ vérifiant $f(x) = 1 - |x-1|$ si $0 \leq x \leq 2$.
1. Tracer le graphe de f.
2. f est-elle C^0 par morceaux ? C^0 ?
3. f est-elle C^1 par morceaux ?

Exercice 11. On considère la fonction f paire définie sur $[-2;2]$ vérifiant $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$ si $0 \leq x \leq 2$.
1. Tracer le graphe de f.
2. f est-elle C^0 par morceaux ? C^0 ?
3. f est-elle C^1 par morceaux ?

Définition 5. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $2\pi-$périodique. On dit que f est C^k par morceaux (sur $\mathbb{R}$) si f est C^k par morceaux sur $[-\pi;\pi]$.*

Exercice 12. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, $2\pi-$périodique, impaire, vérifiant $f(x) = \sin(x) + 1$ pour $]0;\pi[$.
1. f est-elle C^0 ? C^0 par morceaux ?
2. f est-elle C^1 ? C^1 par morceaux ?

Régularisée d'une fonction

Définition 6. *Soit f une fonction C^0 par morceaux définie sur un intervalle I. On appelle* ***régularisée*** *de f, que l'on note f_r la fonction définie par $f_r(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$, pour $x \in I$. $f(x^+)$ (resp. $f(x^-)$) désigne la limite à droite (resp. à gauche) de f en x.*

Exercice 13. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, $2\pi-$périodique vérifiant $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 1 \text{ si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$.
1. f est-elle C^0 ? C^0 par morceaux ?
2. f est-elle C^1 ? C^1 par morceaux ?
3. Déterminer la régularisée de f.