Séries de Fourier

Théorèmes de convergences

Théorème 1. *Théorème de Parseval.*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $2\pi-$périodique et continue par morceaux. On à alors la formule de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t))^2dt = ||f||_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2$$

qui peut aussi s'écrire

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t))^2dt = \frac{a_0^2(f)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2(f) + b_n^2(f))$$

Exercice 1. On sait que si f est définie sur $\mathbb{R}$, $2\pi-$périodique, continue par morceaux, alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t))^2dt = ||f||_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2$$

1. Exprimer $a_o(f)$ en fonction de $c_0(f)$.
2. Exprimer $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$ en fonction de $a_nf(b)$ et $b_n(f)$.
3. En déduire la deuxième formulation de l'égalité de Parseval.

Théorème 2. *Théorème de Dirichlet.*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $2\pi-$périodique $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier en x est une série numérique convergente et

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\Big) = f_r(x)$$

où f_r est la régularisée de f.

Exercice 2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Prouver que si f est continue en x_0, alors $f_r(x_0) = f(x_0)$.

Théorème 3. *Théorème de Dirichlet. Autre formulation.*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $2\pi-$périodique $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier en x est une série numérique convergente. De plus, si f est continue en x,

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\Big) = f(x)$$

et sinon,

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\Big) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

Exercice 3. On considère la fonction 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$, par $\forall x \in [-\pi;\pi], f(x) = |x|$.
1. Tracer le graphe de f.
2. Déterminer ses coefficients de Fourier.
3. Justifier que f coïncide avec sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$
5. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

Exercice 4. Soit f une fonction 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\begin{cases}\forall x \in]-\pi;0[, f(x) = -1\\ \forall x \in]0;\pi[, f(x) = 1\end{cases}$
1. Tracer le graphe d'une telle fonction.
2. Déterminer ses coefficients de Fourier ainsi que sa série de Fourier.
3. Appliquer le théorème de Dirichlet à cette fonction.

Exercice 5. On considère la fonction 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t^2$ si $t \in [-\pi; \pi]$.
1. Tracer le graphe de f.
2. Déterminer la série de Fourier de f et appliquer le théorème de Dirichlet.
3. En prenant $t = \pi$, retrouver un résultat connu.

Exercice 6. Pour chacune des fonctions suivantes :
— tracer le graphe de f
— calculer les coefficients de Fourier (réels) de f
— en déduire les sommes demandées

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi-$périodique, paire, telle $\forall x \in [0, \pi], f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi-$périodique, impaire, telle $\forall x \in [0, \pi], f(x) = x(\pi - x)$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi-$périodique, telle $\forall x \in]-\pi, \pi], f(x) = \sin(\frac{x}{2})$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{16n^2+16n+3}$.
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi-$périodique, telle $\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \cosh(\lambda x)$ (λ est un réel strictement positif donné). En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2+n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2+n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2}$.
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sup(0, \sin(x))$. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.