Calcul différentiel I

Topologie dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 1. 1.a. Quelle est la distance entre -2 et 3 ?
1.b. Calculer $3 - (-2)$.
2.a. Quelle est la distance entre -3 et -5 ?
2.b. Calculer $-5 - (-3)$.
3. Quelle est la distance entre x et y ?

Exercice 2. On considère l'ensemble $B_{a,r} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\}$.
1.a. Ecrire l'ensemble $B_{2,3}$.
1.b. Représenter graphiquement cet ensemble. Quel est le centre de cet intervalle ? Quelles sont ses extremités ?
2.a. Représenter graphiquement $B_{a,r}$.
2.b. Quel est le centre de cet intervalle ? Quelles sont ses extrémités ?
2.c. Ecrire $B_{a,r}$ sous la forme d'un intervalle. Ce résultat est très important et peut se formuler de la façon suivante : un intervalle ouvert est l'ensemble des nombres dont la distance au centre est inférieure à une valeur donnée.
3. Trouver a et r tels que $B_{a,r} =]-2;10[$.

Exercice 3. On rappelle la définition de la limite : on dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tend vers l quand x tend vers a si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Réécrire la définition avec la notation $B_{a,r}$.

Définition 1. *On appelle* **norme** *sur $\mathbb{R}^2$ une application $||.|| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :*
1. $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2, ||\overrightarrow{u}|| = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u} = (0,0)$ (séparation)
2. $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda.\overrightarrow{u}|| = |\lambda|.||\overrightarrow{u}||$ (homogénéité)
3. $\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2, ||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leq ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$ (inégalité triangulaire)
Remarque : une norme permet d'étendre la notion de valeur absolue à $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On définit $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$ par :
a. $||\overrightarrow{u}||_1 = |x| + |y|$
b. $||\overrightarrow{u}||_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$
c. $||\overrightarrow{u}||_\infty = \sup(|x|, |y|)$

Prouver que $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Prouver que $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$ sont équivalentes.

Exercice 6. On note $B_N(a,r) = \{\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid N(\overrightarrow{u}) < r\}$ la boule ouverte de centre a et de rayon r pour la norme N.
Réprésenter les ensembles $B_{||.||_1}(0,1)$, $B_{||.||_2}(0,1)$ et $B_{||.||_\infty}(0,1)$.

Fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles

Exercice 7. Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :
1. $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{y}}$
2. $g(x,y) = \frac{\sqrt{-x+y^2}}{\sqrt{x}}$
3. $h(x,y) = \ln(3x+y+1)$
4. $i(x,y) = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$

Exercice 8. Déterminer les lignes de niveau des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :
1. $f(x,y) = 3x - y + 2$
2. $g(x,y) = e^{y-x^2}$

Exercice 9. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.
1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer $f(1,0)$ et $f(1,2)$.
3. Déterminer les lignes de niveau de la fonction f.
4. Donner les fonctions partielles de f.

Limite et continuité d'une fonction de deux variables

Définition 2. *On dit qu'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie au voisinage d'un point $\overrightarrow{a}$ admet une limite finie l en $\overrightarrow{a}$ si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall \overrightarrow{u} \in U, ||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{a}|| < \alpha \Rightarrow |f(\overrightarrow{u}) - l| < \epsilon$$

Proposition 1. *Soient $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie au voisinage d'un point $\overrightarrow{a} = (x_a, y_a)$ et $l \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre :*
1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_a,y_a)} f(x,y) = l$
2. $\forall (x_n, y_n) \in U^{\mathbb{N}}, \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (x_a, y_a) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = l$

Exercice 10. Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$.

Définition 3. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On dit que f est coninue en $(a, b) \in U$ si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.*

Exercice 11. On considère la fonction f définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Les fonctions partielles $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ sont-elles continues en 0 ?
3. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
4. f est-elle continue en 0 ?

Dérivées partielles des fonctions de deux variables

Définition 4. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. On dit que f est dérivable par rapport à la première variable en (x_0, y_0) si la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0 ; le nombre dérivé est alors noté $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. On a une définition similaire de la dérivabilité par rapport à la seconde variable.*

Exercice 12. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$. Ecrire la définition de la dérivabilité de f par rapport à la deuxième variable.

Exercice 13. Après avoir donné les ensembles de définition, calculer les dérivées partielles premières de :
1. $f(x,y) = 3x^5y^3 - xy^2 + 4y + 1$
2. $g(x,y) = (x^4 - y^3)^5$
3. $h(x,y) = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$
4. $f(x,y,z) = 3x^4z + x^2y^3$

Exercice 14. Donner les ensembles de définition et d'arrivée, puis calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :
1. $f(x,y) = e^x \cos(y)$
2. $f(x,y) = (x^2 + y^2) \cos(xy)$
3. $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2y^2}$

Exercice 15. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ de classe C^1. On pose $F(x,y) = f(x,y)g(x,y)$. On admet que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
1. Trouver une formule pour $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ (indication : $(uv)' = u'v + uv'$)
2. Appliquer la formule trouvée avec $f(x,y) = \cos(xy)$ et $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 16. La loi des gaz parfaits peut prendre la forme : $PV = nRT$ où n est le nombre de moles, T la température, V le volume, P la pression et R une constante. Prouver que $\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V} = -1$.

Exercice 17. Déterminer $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ pour la fonction z définie par $z(x,y) = x^3 - 5xy + y^2$.

Exercice 18. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3y + e^{xy}$.
1. Calculer les dérivées partielles premières de f.
2. Calculer les dérivées partielles secondes de f. Que remarque-t-on ?

Exercice 19. On dit qu'une fonction f est harmonique si : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur son domaine de définition. Démontrer que les fonctions suivantes sont harmoniques :
1. $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$
2. $g(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$
3. $h(x,y) = e^{-x}\cos(y) + e^{-y}\cos(x)$

Exercice 20. Soit $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \\ (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

f est-elle de classe C^1 ?

Exercice 21. Soit $f(x,y) = \arctan(x^2+y)$.

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. u et v sont deux fonctions de classes C^1 définies sur $\mathbb{R}^2$. Soit $F(x,y) = \arctan(u(x,y)+v(x,y))$. Exprimer $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Exercice 22. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - \sin(xy)$.

1. Déterminer les dérivées partielles premières et secondes de la fonction f.
2. Calculer $\nabla f(1,0)$.
3. Déterminer la matrice hessienne de f.