Calcul différentiel II

Limite et continuité d'une fonction de deux variables

Exercice 1. Calculer, si possible, la limite suivante :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} x^2+3y \text{ si } (x,y) \neq (1,2) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (1,2) \end{cases}$.
La fonction f est-elle continue en $(1,2)$?

Dérivée directionnelle

Définition 1. *Soit f une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0,y_0) \in U$. On dit que f est **dérivable en** (x_0,y_0) **selon le vecteur** (h,k) si la fonction $t \mapsto f(x_0+th, y_0+tk)$ est dérivable en 0. Le nombre dérivé de cette fonction, s'il existe, s'appelle le nombre dérivé de f en (x_0,y_0) selon le vecteur (h,k), que l'on note $D_{(h,k)}f(x_0,y_0)$. Autrement dit :*

$$D_{(h,k)}f(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th,y_0+tk)-f(x_0,y_0)}{t} \quad \textit{si cette limite existe}$$

Exercice 3. 1. a. En utilisant la définition précédente, écrire $D_{(1,0)}f(x_0,y_0)$. Que retrouve-t-on ?
1. b. Que vaut $D_{(0,1)}f(x_0,y_0)$?
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
2. Prouver que f est continue en $(0,0)$.
3. Calculer le nombre dérivé de f en $(0,0)$ selon la direction (h,k).
4. En déduire $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction dont la différentielle en $(0,0)$ est $L(h,k) = 2x - 3y$.
1. Déterminer $D_{(5,3)}f(0,0)$.
2. Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Différentielle des fonctions de deux variables

Définition 2. *Soit f une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0,y_0) \in U$. On dit que f est **différentiable au point** (x_0,y_0) s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-L(h,k)}{||(h,k)||} = 0$$

L s'appelle alors la différentielle de f au point (x_0,y_0).

Exercice 5. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 - y^2$ et $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. En utilisant la définition de la différentiabilité, montrer que l'application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, L(h,k) = 3x_0^2 h - 2y_0 k$$

est la différentielle de f au point (x_0,y_0).

Exercice 6. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2$ et $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. En utilisant la définition de la différentiabilité, montrer que l'application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, L(h,k) = 6x_0 h + 4y_0 k$$

est la différentielle de f au point (x_0,y_0).

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable en (x_0,x_0). On note $L(h,k) = ah + bk$ la différentielle de f en (x_0,y_0).
1. Calculer $L(1,0)$ et $L(0,1)$.
2. Exprimer a et b à l'aide de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.
3. En déduire une formule pour $L(h,k)$.

Dérivées partielles

Exercice 8. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :
1. $f_1(x,y) = \frac{x}{y}$
2. $f_2(x,y) = \cos(x+y)$
3. $f_3(x,y) = \frac{1}{y}$
4. $f_4(x,y) = x^3y + e^{xy}$
5. $f_5(x,y) = x^2 - \sin(xy)$

Exercices communs

Définition 3. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}^2$ est dit* ***continûment différentiable****, ou de* ***classe*** *C^1 sur U si elle est différentiable en tout point de U et si $(x_0, y_0) \mapsto L_{(x_0,y_0)}$ est continue.*

Théorème 1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}^2$ est de classe C^1 sur U si, et seulement si, ses dérivées partielles existent et sont continues sur U.*

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (1,2) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (1,2) \end{cases}$.

1. a. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
1. b. Etudier la différenttiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
1. c. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
2. a. Etudier la continuité de f en $(0,0)$.
2. b. Etudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.
2. c. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 10. On note $\mathbb{1}_{(x,y)\neq(0,0)}$ la fonction qui vaut $\begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser si elle est continue, différentiable, coninûment différentiable en $(0,0)$:
1. $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \mathbb{1}_{(x,y)\neq(0,0)}$
2. $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \mathbb{1}_{(x,y)\neq(0,0)}$
3. $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{xy^3}{x^4+y^2} \mathbb{1}_{(x,y)\neq(0,0)}$
4. $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{y^4}{x^2+y^2} \mathbb{1}_{(x,y)\neq(0,0)}$
5. $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) \mathbb{1}_{(x,y)\neq(0,0)}$