Calcul différentiel III

Dérivées partielles d'ordre deux

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes :
1. $f(x,y) = 3x^2y^3 - \sin(xy)$
2. $g(x,y) = e^{x^2+y^2}$
3. $h(x,y) = (x-y)^5$
4. $i(x,y,z) = xyz^2 + xy^3z^3$

Théorème 1. *Théorème de Shwarz.*
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 en (x_0, y_0), alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$$

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3y + e^{xy}$.

1. Sans effectuer aucun calcul, peut-on affirmer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$?
2. Déterminer les dérivées premières et secondes de f.

Définition 1. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction dont les dérivées partielles d'ordre 2 existent en (x_0, y_0). On appelle* ***matrice hessienne*** *de f en (x_0,y_0), notée $Hessf_{(x_0,y_0)}$, la matrice définie par*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Exercice 3. On condière la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - \sin(xy)$.

1. Déterminer les dérivées partielles premières et secondes de la fonction f.
2. Calculer $\nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \end{pmatrix}$ (appelé gradient de f en $(1,0)$).
3. Déterminer $\mathrm{Hess}f_{(1,0)}$.

Plan tangent

Définition 2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en x_0. L'équation de la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ est*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Définition 3. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en (x_0,y_0). On note L la différentielle de f en (x_0,y_0). On appelle plan tangent au graphe de f au point $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ le plan d'équation :*

$$z = f(x_0,y_0) + L(x - x_0, y - y_0)$$

Si on note $\overrightarrow{x} = (x,y)$ et $\overrightarrow{x}_0 = (x_0,y_0)$, cette équation devient :

$$z = f(\overrightarrow{x}_0) + L(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}_0)$$

Notez la ressemblance avec l'équation de la tangente pour une fonction à une variable.

Exercice 4. Trouver l'équation du plan tangent pour chaque surface ci-dessous, au point (x_0,y_0,z_0) donné :

1. $z = \sqrt{19 - x^2 - y^2}$, $\quad (x_0,y_0,z_0) = (1,3,3)$
2. $z = \sin(\pi xy)\exp(2x^2y - 1)$, $\quad (x_0,y_0,z_0) = (1,1/2,1)$.

Indication : commencer par déterminer les différentielles des fonctions sous-jacentes.

Exercice 5. On demande à un étudiant de trouver l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = x^4 - y^2$ au point $(x_0,y_0,z_0) = (2,3,7)$. Sa réponse est

$$z = 4x^3(x-2) - 2y(y-3).$$

1. Expliquer, sans calcul, pourquoi cela ne peut en aucun cas être la bonne réponse.
2. Quelle est l'erreur commise par l'étudiant ?
3. Donner la réponse correcte.

Extremum locaux et points cols

Définition 4. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dont les dérivées partielles existent en $(x_0, y_0) \in U$. On dit que (x_0, y_0) est un* ***point critique*** *de f si*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Proposition 1. *Si f admet un extremum local en (x_0, y_0), alors (x_0, y_0) est un point critique de f.*

Théorème 2. *Soit f une fonction de classe C^2 sur (un ouvert) $U \in \mathbb{R}^2$. On note*

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

1. si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, alors f admet un minimum local en (x_0, y_0)
2. si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, alors f admet un maximum local en (x_0, y_0)
3. si $rt - s^2 < 0$, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0), on dit que f admet un point **col** *ou* **selle** *en (x_0, y_0).*

Exercice 6. Pour chacune des fonctions suivantes étudier la nature du point critique donné :
1. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ au point critique $(0, 0)$
2. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ au point critique $(0, 0)$
3. $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ au point critique $(0, 0)$.

Exercice 7. Trouver les points critiques de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$ et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

Exercice 8. Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :
1. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 + y^3$
2. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + xy + y^2$
3. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 - 3xy + y^3$
4. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{xy} - xy - 1$

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que
$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = 3$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = 2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = 1$
Le point (a, b) est-il un point ctritique ? Si oui, de quelle nature ?

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x - 2y)^2 + x^2 + y^2$.

1. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Etudier les extremums relatifs de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x^2 - 4)^2 + y^2$.

1. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Etudier les extremums relatifs de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Etudier les extremums relatifs de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$.

1. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Etudier les extremums relatifs de f sur $\mathbb{R}^2$.