Nombres complexes - Révisions

Exercice 1. Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b\in)$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 2. Écrire sous la forme $a+ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Exercice 3. Calculer le module et l'argument de $u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v=1-i$. En déduire le module et l'argument de $w=\frac{u}{v}$.

Exercice 4. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$e^{e^{i\alpha}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta}+e^{2i\theta}.$$

Exercice 5. Calculer les racines carrées de 1, i, $3+4i$, $8-6i$, et $7+24i$.

Exercice 6.

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 7. Résoudre dans les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \quad ; \quad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \quad ; \quad z^2-\sqrt{3}z-i=0 \quad ;$$

$$z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0\ ;\ z^2-(3+4i)z-1+5i=0\ ;\ 4z^2-2z+1=0\ ;$$

$$z^4+10z^2+169=0 \quad ; \quad z^4+2z^2+4=0.$$

Exercice 8. Calculer la somme $S_n=1+z+z^2+\cdots+z^n$.

Exercice 9.

1. Résoudre $z^3=1$ et montrer que les racines s'écrivent 1, j, j^2. Calculer $1+j+j^2$ et en déduire les racines de $1+z+z^2=0$.
2. Résoudre $z^n=1$ et montrer que les racines s'écrivent $1,\epsilon,\ldots,\epsilon^{n-1}$. En déduire les racines de $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$. Calculer, pour $p\in$, $1+\epsilon^p+\epsilon^{2p}+\cdots+\epsilon^{(n-1)p}$.

Exercice 10. Trouver les racines cubiques de $2-2i$ et de $11+2i$.

Exercice 11.

1. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes distincts ayant le même cube.

   Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.

2. Donner, sous forme polaire, les solutions dans de :

$$z^6+(7-i)z^3-8-8i=0.$$

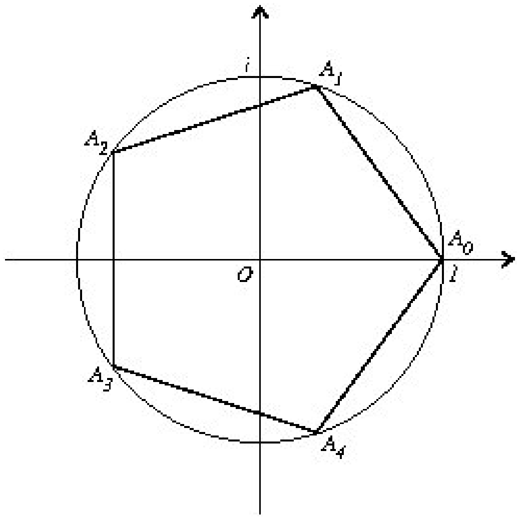
   (Indication : poser $Z=z^3$; calculer $(9+i)^2$)

Exercice 12. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $\left|\frac{z-3}{z-5}\right|=1$,
2. $\left|\frac{z-3}{z-5}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 13. Montrer que pour $u,v\in$, on a $|u+v|^2+|u-v|^2=2(|u|^2+|v|^2)$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 14. Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA_0}$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes .



1. Donner les affixes $\omega_0, \ldots, \omega_4$ des points $A_0, \ldots, A_4$. Montrer que $\omega_k = {\omega_1}^k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Montrer que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$.

2. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

3. On considère le point B d'affixe -1. Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\sin\frac{\pi}{10}$ puis de $\sqrt{5}$ (on remarquera que $\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5}$).

4. On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre I de rayon $\frac{1}{2}$ et enfin le point J d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la demi-droite $[BI)$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ.

5. **Application:** Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.

Exercice 15. Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ, et soit $\overline{z}$ son conjugué.
Calculer $(z + \overline{z})(z^2 + \overline{z}^2) \ldots (z^n + \overline{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.

Exercice 16. En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 17. Soit $[i] = \{a + ib\ ;\ a, b \in\}$.

1. Montrer que si α et β sont dans $[i]$ alors $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ le sont aussi.

2. Trouver les élements inversibles de $[i]$, c'est-à-dire les éléments $\alpha \in [i]$ tels qu'il existe $\beta \in [i]$ avec $\alpha\beta = 1$.

3. Vérifier que quel que soit $\omega \in$ il existe $\alpha \in [i]$ tel que $|\omega - \alpha| < 1$.

4. Montrer qu'il existe sur $[i]$ une division euclidienne, c'est-à-dire que, quels que soient α et β dans $[i]$ il existe q et r dans $[i]$ vérifiant :
$$\alpha = \beta q + r \qquad \text{avec} \qquad |r| < |\beta|.$$
(Indication : on pourra considérer le complexe $\frac{\alpha}{\beta}$)