

## Applications

**Exercice 1.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = |x|$ . Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour  $x \in \mathbb{R}$  par  $g(x) = -x$ .

1. Déterminer  $f \circ f$ ,  $g \circ g$ ,  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

2. Déterminer :  $f([-2, 3])$ ,  $f(\{-2, 3\})$ ,  $f(\mathbb{R})$ ,  $f^{-1}([-2, 3])$ ,  $f^{-1}(\{-2, 3\})$  et  $f^{-1}(\mathbb{R})$ .

**Exercice 2.** Soient  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ ,  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ , et  $X$  et  $Y$  deux parties de  $F$ . Que penser des égalités suivantes ?

1.  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

2.  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ .

3.  $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ .

4.  $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$ .

**Exercice 3.** Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  l'application définie par  $f(n) = \frac{n}{2}$  si  $n$  est pair, et par  $f(n) = 0$  si  $n$  est impair.

1. Déterminer l'image directe de  $X = \{0, 1, 2, 3\}$  par  $f$ .

2. Déterminer l'image réciproque de  $X$  par  $f$ .

**Exercice 4.** Soit  $g : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour  $x \in \mathbb{R}$  par  $g(x) = \sin(x)$ .

1. Déterminer  $f(\mathbb{R})$ .

2. Déterminer  $g \circ f$ .

3. Déterminer  $(g \circ f)(\mathbb{R})$  et tracer le graphe de  $g \circ f$ .

4. Déterminer  $f^{-1}(\{1\})$ .

5. Déterminer  $f^{-1}([0; 1])$ .