Dérivée d'une fonction en un point et sur un intervalle

Exercice 1. Le but de l'exercice est de calculer la dérivée de la fonction cos.
1. Rappeler la définition de la dérivée.
2. Calculer $\cos(x+h)$ à l'aide d'une formule trigonométrique.
3. En déduire $\cos'(x)$.

Exercice 2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 3. Soit f une fonction dérivable en un point x_0. Montrer que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0)$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer l'ensemble sur lequel f est dérivable et calculer $f'(x)$.

Exercice 5. On considère la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. f est-elle de classe C^1 ?

Calcul de dérivées

Exercice 6. Étudier les variations des fonctions suivantes :
1. $x \mapsto \frac{ln(x)}{x}$
2. $x \mapsto sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$

Exercice 7. Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir précisé la formule à utiliser :
1. $f(x) = ln(x^2+3x-2)$
2. $g(x) = ln(cos(x))$
3. $h(x) = e^{x^2}$
4. $i(x) = \frac{x^2+5x-2}{x^2+1}$
5. $j(x) = \sqrt{3x+1}$
6. $k(x) = (-x^2+2)ln(x)$

Exercice 8. Calculer $\tan'(x)$.

Exercice 9. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire de f' si :
1. f est paire
2. f est impaire
3. f est $T-$périodique

Exercice 10. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$.
1. Calculer la dérivée m-ième de $x \mapsto x^n$.
2. Qu'obtient-on pour $m = n$?

Exercice 11. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$.
1. Calculer $P(0)$, $P'(0)$ et $P''(0)$.
2. Calculer $P^{(m)}(0)$. En déduire une formule pour a_m.
3. Réécrire $P(x)$ à l'aide des formules précédentes. La formule obtenue s'appelle formule de Taylor.

Exercice 12. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kcos(kx)$.