Notions de fonction

Exercice 1. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :
1. $x \mapsto \frac{1}{x^2-2x-3}$
2. $x \mapsto \sqrt{x^2-4}$
3. $x \mapsto \frac{1}{x-\mathrm{E}(x)}$, où E désigne la fonction partie entière
4. $x \mapsto \ln(x^4-4)$

Exercice 2. Après en avoir précisé l'ensemble de définition, étudier la parité des fonctions suivantes :
1. $x \mapsto x|x|$
2. $x \mapsto x^2\tan(x)$
3. $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$
4. $x \mapsto \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)$
5. $x \mapsto x^6 + x^4 + 3$
6. $x \mapsto x^5 - 2x^3$

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
1. f paire $\Leftrightarrow b = 0$. Prouver que :
2. f impaire $\Leftrightarrow a = c = 0$.

Exercice 4. A l'aide de la formule $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$, retrouver les formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

Exercice 5. Prouver que la graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exercice 6. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
1. Prouver qu'il existe une unique fonction g paire et une unique fonction h impaire telles que $f = g + h$. g s'appelle la partie paire de f et h la partie impaire de f.
2. Déterminer la partie paire et la partie impaire de la fonction exponentielle.

Exercice 7. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est-elle décroissante sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$? Sur $]-\infty;0[$? Sur $]0;+\infty[$? Sur chacun de ces intervalle, est-elle minorée ? Majorée ?

Exercice 8. Résoudre l'inéquation $|2x-3| - |2-x| \leq 4$.

Exercice 9. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto |x| + |x-1|$.

Exercice 10. Majorer $x \mapsto \frac{2}{x^2+1}$ sur $[0;10]$.

Exercice 11. Prouver que les fonctions suivantes sont périodiques et déterminer leurs périodes :
1. $f_1(x) = sin(5x)$
2. $f_2(x) = \tan(3x) - 2$
3. $g(x) = x - E(x)$
4. $h(x) = \cos(\omega x)$, où ω est un réel strictement positif.

Limites

Exercice 12. Étudier les limites de :
1. $x^5 - x^2 + 10$ en 2.
2. $e^(2x^3 + 9)$ en 0, $-\infty$ et $+\infty$.
3. $\frac{x^3-1}{x^2-1}$ en 1, -1^- et -1^+.
4. $\frac{1}{\cos(x-\frac{\pi}{2})}$ en $\frac{\pi}{2}^+$.
5. $\frac{\sin(x)}{x}$ en 0.

Exercice 13. Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de :
1. $\frac{x+1}{x-1}$
2. $\frac{x^2}{x^5+5x+3}$
3. $\frac{x^3-3x}{x^4+x^3+1}$

Exercice 14. Soit $f(x) = \frac{2x+5}{4x-1}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Trouver deux réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{4x-1}$.
3. Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 15. Après avoir donner leur ensemble de définition, déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions définies par :
1. $\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}$
2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+5}$

Exercice 16. Pour chacune des fonctions suivantes, dire si la fonction est minorée, majorée, bornée.
1. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$
2. $g(x) = x\sin(x)$
3. $h(x) = \cos(e^x))$
4. $i(x) = e^{2-x^2}$

Exercice 17. En utilisant les propriétés de composition des limites, déterminer les limites de :
1. $cos(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{x})$ en $-\infty$.
2. $\frac{sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.
3. $e^{\frac{1}{x-1}}$ en 1^+ et 1^-.

Exercice 18. Soit f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f tend ver $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0.
1. Prouver que f est bornée au voisinage de x_0.
2. On suppose de plus que $l > 0$. Prouver qu'il existe $h > 0$ et $\alpha > 0$ tels que $\forall x \in]x_0 - h : x_0 + h[, f(x) \geq \alpha$.

Exercice 19. Étudier les limites suivantes :
1. $\frac{x^3+x^2+5}{5x^3-x^2+2}$ en $+\infty$.
2. $\frac{\tan(5x)}{\sin(x)}$ en 0.
3. $\frac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. $\frac{x^6-3x^2+1}{2x^2-x+2}$ en $-\infty$.
5. $\frac{\sqrt{x+1}}{x^3-x+2}$ en $+\infty$.

Exercice 20. Déterminer la limite de $\frac{sin(\frac{1}{x})}{x}$ en $+\infty$.