Logarithme et exponentielle

Exercice 1. On considère l'équation $ln(2x+1) = ln(x+3)$ (E).
1. Déterminer l'ensemble sur lequel est définie l'équation (E).
2. Résoudre (E).

Exercice 2. On considère l'équation $ln(x-3) = ln(2x+5)$ (E).
1. Déterminer l'ensemble sur lequel est définie l'équation (E).
2. Résoudre (E).

Exercice 3. Résoudre l'inéquation $ln(x^2 - x - 1) \leq 0$.

Exercice 4. Résoudre les équations :
1. $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$.
2. $-e^{2x} + 5e^x + 6 = 0$.
3. $e^{4x} - 1 = 0$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 + 4x + e^x$.
1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = ln(\sqrt{x})$. Soit x un réel plus grand que 1.
1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer $f'(x)$.
2. Appliquer le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle $[1; x]$.
3. Donner un encadrement de f' sur $[1; x]$.
4. En déduire un encadrement de $f(x) - f(1)$ sur $[1; x]$.
5. Déduire de l'encadrement précédent $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x}$.

Exercice 7. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
1. En utilisant le changement de variable $X = \frac{1}{x}$, prouver que $\lim\limits_{X \to 0^+} Xln(X) = 0$.
2. En utilisant le changement de variable $y^a = x$ dans $\lim\limits_{x \to 0^+} xln(x) = 0$, déterminer $\lim\limits_{y \to 0^+} y^a ln(y)$.
3. Quel changement de variable utiliser dans quelle égalité pour déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}$?

Fonctions circulaires inverses

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(x) = arctan(1 - 2x)$.
1. Tracer le graphe de la fonction arctan.
2. Déterminer l'ensemble de définition la fonction f.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Résoudre $f(x) = 0$.

Exercice 9. Quelques propriétés de la fonction arcsin.
1. Tracer le graphe de la restriction à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ de la fonction sin. Représenter les tangentes horizontales.
2. En déduire le graphe de la fonction arcsin.
3. Déterminer à l'aide du graphique l'ensemble de dérivabilité de la fonction arcsin.
4. Pour quels x la formule $arcsin(sin(x)) = x$ est-elle valable ?
5. Rappeler la formule de dérivation de la composée de deux fonctions.
A l'aide de cette formule, dériver l'équation $arcsin(sin(x)) = x$.
6. En posant $y = sin(x)$ déterminer $arcsin'(y)$.

Exercice 10. En reprenant la méthode de l'exercice précédent, déterminer la dérivée de arccos.

Exercice 11. Prouver que $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], arcsin(x) + arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 12. Calculer :
1. $arccos(cos(\frac{2\pi}{3}))$
2. $arccos(cos(-\frac{2\pi}{3}))$
3. $arccos(cos(4\pi))$
4. $arctan(tan(\frac{3\pi}{4}))$

Exercice 13. Résoudre $arcsin(sin(x)) = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 14. Simplifier :
1. $\sin(\arccos(x))$
2. $\cos(\arcsin(x))$
3. $\sin(2\arccos(x))$
4. $\cos(2\arcsin(x))$
5. $\sin(2\arcsin(x))$
6. $\cos(2\arccos(x))$