Nombre réels

Exercice 1. Prouver que pour tout réel a et tout réel b, on a : $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

Exercice 2. Résoudre :
1. $|x+3| = 5$
2. $|x-7| = 21$
3. $|2x-5| = 10$
4. $|x+3| = |x+4|$
5. $|1-x| = |3x+1|$

Exercice 3. Après avoir rappeler l'inégalité triangulaire, prouver $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

Exercice 4. Résoudre :
1. $|x| + |2x-3| + |x+5| = 0$
2. $x^2 - 3|x| + 2 = 0$
3. $|x| + |2x-3| - |x+5| = 0$

Exercice 5. Parmi les relations suivantes, quelles sont celles qui sont vérifiées quels que soient les quatre réels x_1, x_2, y_1 et y_2, vérifiant $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$?
1. $x_1^2 \leq y_1^2$
2. $x_1 - x_2 \leq y_1 - y_2 5$
3. $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2 5$
4. $x_1 x_2 \leq y_1 y_2$
5. $\frac{x_1}{x_2} \leq \frac{y_1}{y_2}$

Exercice 6. Reprendre l'exercice précédent en supposant de plus que les quatre réels sont positifs.

Exercice 7. Soient a, b, c et d quatre réels vérifiant $a^2+b^2+c^2+d^2 = ab+bc+cd+da$. Prouver que $a = b = c = d$.

Exercice 8. Prouver les propriétés suivantes :
1. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$

Exercice 9. Prouver que :
1. $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
2. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{|a-b|} \geq |\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}|$.

Exercice 10. a et b sont deux réels positifs ou nuls tels que $a \leq b$. Simplifier l'expression :

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-b}\sqrt{b}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-b}\sqrt{b}}$$

Exercice 11. Tracer le graphe de la fonction partie entière. Déterminer $E(3.8)$ $E(2)$, $E(\frac{\pi}{4})$ et $E(-3.2)$.

Exercice 12. Soient a et b deux réels, prouver que :
1. $a \leq b \Rightarrow E(a) \leq E(b)$
2. $E(a) + E(b) \leq E(a+b) \leq E(a) + E(b) + 1$

Exercice 13. Montrer que l'intersection de deux intervalles est un intervalle (éventuellement vide). Que peut-on dire de l'intersection de deux intervalles ouverts ? De deux intervalles fermés ?

Borne supérieure

Exercice 14. L'ensemble $\{\sin(n) | n \in \mathbb{N}\}$ est-il majoré ? Minoré ?

Dans chacun des cas suivants, préciser si I a un majorant, un minorant, un plus grand élément, un plus petit élément, une borne supérieure, une borne inférieure :
1. $I = [0; +\infty[$
2. $I =]a; b[$, où $a < b$
3. $I =]-\infty; +\infty[$
4. $I =]a; b]$, où $a < b$
5. $I = [a; b]$, où $a < b$

Exercice 15. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ avec A bornée et $B \subset A$. Comparer $\sup(A)$, $\sup(B)$, $\inf(A)$, $inf(B)$.

Exercice 16. Déterminer les bornes supérieure et inférieure, si elles existent, des ensembles suivants :
1. $A = \left\{\sin\left(\frac{2n\pi}{5}\right),\ n \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. $B = \left\{\cos\left(\frac{2n\pi}{5}\right),\ n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 17. Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ avec $\sup(A) > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.

Exercice 18. Soient a et b deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, quelles sont leurs bornes supérieures, inférieures ?
1. $\{a + bn | n \in \mathbb{N}\}$
2. $\{a + (-1)^n b | n \in \mathbb{N}\}$
3. $\{a + \frac{b}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$
4. $\{(-1)^n a + \frac{b}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$
5. $\{a + \frac{(-1)^n b}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$

Exercice 19. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On note :
$-A = \{-x | x \in A\}$
$A + B = \{x + y | x \in A, y \in B\}$
$a + A = \{a + x | x \in A\}$
1. Prouver que $\sup(-A) = -\inf(A)$.
2. Prouver que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
3. Prouver que $\sup(a + A) = a + \sup(A)$.