Raisonnements

Logique et raisonnements

Exercice 1. Modus Ponens.
Soient P et Q deux assertions.
1. Dresser la table de vérité de (P et $P \Rightarrow Q$).
2. Servez-vous de 1. pour dresse la table de vérité de (P et $P \Rightarrow Q$)$\Rightarrow Q$.
3. Que constatez-vous ?

Exercice 2. Contraposée.
1. Dresser les tables de vérité de l'assertion $P \Rightarrow Q$ et de l'assertion $non(Q) \Rightarrow non(P)$.
2. Conclure.

Raisonnements

Exercice 3. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+\star})^2$. Montrer que si $a^2 + b^2 - 14ab = 0$, alors $\ln\left(\dfrac{a+b}{4}\right) = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.

Exercice 4. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+\star})^2$. Montrer que si $x \neq y$, alors $\ln x \neq \ln y$.

Exercice 5. Montrer qu'il est possible d'écrire la fonction exponentielle comme la somme d'une fonction paire f et d'une fonction g impaire.

Exercice 6. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 7. Démontrer que pour tout entier n : $2^n > n$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une forme plus simple de l'expression :

$$1.1! + 2.2! + \cdots + n.n!$$

(Trouver une formule pour n petit, puis la démontrer par récurrence.)

Exercice 9. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prouver que si $x \neq y$, alors $e^x \neq e^y$.

Exercice 10. Prouver que si n est un entier naturel impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Exercice 11. Soit a et b deux réels strictement positifs. Prouver : $\frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1} \Rightarrow a = b$.