Suites - Théorèmes de convergence

Théorème 1. *Toute suite de réels croissante et majorée converge.*

Théorème 2. *Toute suite de réels décroissante et minorée converge.*

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n^3}{4}$.
1. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{1}{2}$.
3. Conclure.

Exercice 2. Trouver :
1. une suite de réels croissante qui ne converge pas
2. une suite de réels majorée qui ne converge pas

Exercice 3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante.
1. On suppose que $u_0 < u_1$. Prouver que (u_n) est croissante.
2. On suppose que $u_0 > u_1$. Prouver que (u_n) est décroissante.
3. Applications :
3.1.1. $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Étudier les variations de (u_n).
3.1.2. Prouver que (u_n) est majorée par 1. Conclure.
3.2.1. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Étudier les variations de (u_n).
3.2.2. Prouver que (u_n) est minorée par 1. Conclure.

Exercice 4. On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = e^{u_n} - 2, \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$
1. Trouver f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$.
2.1. Dresser le tableau de variation de g.
2.2. Prouver qu'il existe $\alpha < 0$ et $\beta > 0$ tels que $g(\alpha) = g(\beta) = 0$.
2.3. En déduire le signe de g.
3. On suppose que (u_n) converge vers l.
3.1. Prouver que $g(l) = 0$.
3.2. En déduire les valeurs possibles pour l.
4. On suppose que $u_0 < u_1$. Prouver que (u_n) est strictement croissante.
5. Que dire si $u_0 > u_1$?
6. En utilisant la question 2.3, trouver pour quelles valeurs de u_0 on a $u_0 < u_1$ et pour quelles valeurs de u_0 on a $u_0 > u_1$.
7. On suppose que $u_0 < \alpha$.
7.1. Prouver que (u_n) est majorée par α.
7.2. Conclure.
8. On suppose que $\alpha < u_0 < \beta$.
8.1. Prouver que (u_n) est minorée par α.
8.2. Conclure.
9. On suppose que $u_0 > \beta$.
9.1. Prouver que (u_n) ne peut pas être majorée.
9.2. Conclure.
10. Représenter graphiquement l'étude précédente.

Suites adjacentes

Définition 1. *On dit que les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si :*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante*
- *pour tout* $n \geq 0$, $u_n \leq v_n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$

Théorème 3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors :*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exercice 5. Parmi les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, préciser, en justifiant, lesquelles sont adjacentes :
1. $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n^2+1}$
2. $u_n = -\frac{1}{n+1}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n!}$
3. $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!}$

Exercice 6. Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_n = \frac{E(x10^n)}{10^n}$ et $v_n = \frac{1+E(x10^n)}{10^n}$.
1. On suppose que $x = \pi$. Calculer u_0, u_1, u_2, v_0, v_1 et v_2.
2. Prouver que (u_n) est croissante.
3. Prouver que (v_n) est décroissante.
4. Prouver que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5. Conclure.

Suites extraites

Définition 2. *On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite (ou sous-suite) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si il existe une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\phi(n)}$.*

Proposition 1. *Si (u_n) est une suite qui converge vers l, alors toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers l.*

Théorème 4. *Théorème de Bolzano-Weierstrass.*
Toute suite bornée admet une suite extraite qui converge.

Exercice 7. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = (1 + (-1)^n)n$.
1. Calculer u_{2n} puis $\lim_{n\to+\infty} u_{2n}$.
2. Calculer u_{2n+1} puis $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1}$.
3. Que peut-on dire de (u_n) ?

Exercice 8. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Parmi les suites suivantes, préciser lesquelles sont extraites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; si la suite est extraite, préciser $\phi(n)$, si elle ne l'est pas justifier pourquoi :
1. $v_n = u_{2^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. $v_n = u_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. $v_n = u_{\sqrt{n}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
4. $v_n = u_{4n+3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 9. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = cos(\frac{n\pi}{3})$.
1. Représenter graphiquement cette suite.
2. Calculer u_{6n}, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Trouver 5 autres suites constantes, extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 10. On considère (u_n), la suite définie par

$$u_n = \frac{5n^2 + sin(n)}{3(n+2)^2 cos(\frac{n\pi}{5})}$$

1. Calculer, puis étudier la limite de (u_{10n}).
2. Prouver que (u_n) est divergente.

Exercice 11. Prouver que la suite $(sin(n))$ a une suite-extraite qui converge.