Compléments algèbre linéaire

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont* ***supplémentaires dans*** *E, si :*

$$\forall x \in E, \exists!(a,b) \in F \times G : x = a + b$$

Dans ce cas, on note $E = F \oplus G$.
On peut alors définir :
la projection sur F parallèlement à G : *et la projection sur G parallèlement à F :*

$$\begin{array}{rcl} p : E & \to & E \\ x & \mapsto & a \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} q : E & \to & E \\ x & \mapsto & b \end{array}$$

Proposition 1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F et G sont supplémentaires dans E si, et seulement si :*

- *$dim(F) + dim(G) = dim(E)$*
- *$F \bigcap G = \{O_E\}$*

Exercice 1. Donner un exemple de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Les sous-espaces vectoriels $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x+2y}{3} = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -4y - 2x = 0 \right\}$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3. Soit $E = \mathbb{R}^2$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y - x = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y + x = 0 \right\}$.
1. Prouver que F et G sont supplémentaires dans E.
2. Exprimer la projection sur F parallèlement à G.
3. Exprimer la projection sur G parallèlement à F.

Exercice 4. On se place dans $\mathbb{R}^3$. Trouver une base de $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\ 0 \mid x + y + z = 0 \right\}$.

Exercice 5. On se place dans $\mathbb{R}^3$. Trouver une base de $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \text{ et } y = z \right\}$.

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\ 0 \mid x + y + z = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \text{ et } y = z \right\}$.
1. Déterminer $\dim(F)$ et $\dim(G)$.
2. Prouver que F et G sont supplémentaires dans E.
3. Exprimer la projection sur F parallèlement à G.
4. Exprimer la projection sur G parallèlement à F.

Changements de bases

Exercice 7. On se place dans $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{B}_C$ la base canonique. Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$, où $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Prouver que $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

On considère le vecteur $\overrightarrow{w}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{B}_C$ sont $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Cela signifie que $\overrightarrow{w} = 5i + 4j$. On note $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans la base $\mathcal{B}_1$. Cela signifie $\overrightarrow{w} = x'e_1 + y'e_2$

2. Tracer le vecteur $\overrightarrow{w}$ dans un repère.
3. Calculer x' et y'.

On considère la matrice

$$P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice s'appelle la **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}_C$ à la base $\mathcal{B}_1$.

4. Calculer PX'. Que constate-t-on ?
5. Comment calculer X' à l'aide de X et de P ?

Exercice 8. On se place dans $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{B}_C$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_C}(\mathcal{B}')$.
3. Inverser P.
4. Que représente les colonnes de P^{-1} ?
5. Soit $\overrightarrow{w}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 9. Soit $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}) \end{array}$. On note $\mathcal{B}_C$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.
2. Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$.
4. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$.
5. Quel nom donner à f ?