# Arithmétique

MiMos concernés :
— Division euclidienne et PGCD
— Théorème de Bezout

## Divisibilité

**Définition 1.** *Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. On dit que $b$ divise $a$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bk$. Dans ce cas, on note $b|a$.*

**Exercice 1.** Soit $a \in \mathbb{Z}$. On $\mathcal{D}(a)$ l'ensemble des diviseurs de $a$. Par exemple, $\mathcal{D}(12) = \{-4, -3, -1, 1, 3, 4\}$.
1. Déterminer $\mathcal{D}(15)$.
2. Déterminer $\mathcal{D}(33)$.
3. Déterminer $\mathcal{D}(-8)$.
4. Déterminer $\mathcal{D}(1)$.
5. Déterminer $\mathcal{D}(0)$.

**Exercice 2.** Soient, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prouver les assertions suivantes :
1. $(a|b$ et $b|a) \Rightarrow b = \pm a$
2. $(a|b$ et $b|c) \Rightarrow a|c$
3. $(a|b$ et $a|c) \Rightarrow a|(b + c)$

**Exercice 3.** Prouver que le produit deux entiers consécutifs est divisible par 2.

**Définition 2.** *Soit $a, b \in \mathbb{N}$. On appelle plus grand commun diviseur de $a$ et $b$, le plus grand entier qui divise à la fois $a$ et $b$. On le note $pgcd(a, b)$.*

**Exercice 4.** Déterminer :
1. pgcd(12,48)
2. pgcd(13,10)
3. pgcd(36,54)
4. pgcd(14,15)
5. pgcd(15,16)
6. pgcd(16,17)

**Exercice 5.** Prouver que le pgcd de deux entiers consécutifs est 1.

## Division euclidienne

**Définition 3.** *Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Alors, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que*
- $a = bq + r$
- $0 \leq r < b$

**Exercice 6.** Donner le reste de la division euclidienne de :
1. 23 par 5
2. -12 par 7
3 -49 par 18

**Exercice 7.** Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On note $q$ et $r$ le quotient et le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$.
1. Écrire l'égalité vérifiée par $a$, $b$, $q$ et $r$.
2. Prouver que $\mathcal{D}(a) \bigcap \mathcal{D}(b) \subset \mathcal{D}(b) \bigcap \mathcal{D}(r)$.
3. Prouver que $\mathcal{D}(b) \bigcap \mathcal{D}(r) \subset \mathcal{D}(a) \bigcap \mathcal{D}(b)$.

**Exercice 8.** Appliquer l'algorithme d'Euclide pour déterminer :
1. pgcd(2555,240)
2. pgcd(288,224)
3. pgcd(1455,585)

**Définition 4.** *Soient $a$ et $b$ deux entiers. On dit que $a$ et $b$ sont* ***premiers entre eux*** *si $pgcd(a,b) = 1$.*

**Exercice 9.** Prouver que 99 et 100 sont premiers entre eux.

## Théorème de Bezout

**Proposition 1.** *Théorème de Bezout.*
*Soient $a$ et $b$ des entiers. Il existe des entiers $u$ et $v$ tels que $au + bv = pgcd(a,b)$.*

**Exercice 10.** Soient $a = 736$ et $b = 530$.
1. Calculer $\text{pgcd}(a,b)$.
2. Déterminer deux entiers relatifs $n$ et $m$ tels que $an + bm = \text{pgcd}(a,b)$.

**Exercice 11.** Considérons l'équation suivante : $(E)$ $78x + 65y = 91$.
1. Montrer que cette équation est équivalente à une équation $(E')$ $ax + by = c$ où $\text{pgcd}(a,b) = 1$.
2. Déterminer une solution particulière $(x_0, y_0)$ de l'équation $(E')$.
3. Résoudre $(E)$ en utilisant le couple $(x_0, y_0)$.

**Exercice 12.** Soient $a$, $b$ et $d$ trois entiers tels que :
- $d|a$
- $d|b$

Démontrer que $d|pgcd(a,b)$.

**Exercice 13.** Résoudre (dans $\mathbb{Z}^2$) $161x + 368y = 115$.

**Exercice 14.** Résoudre (dans $\mathbb{Z}^2$) $189x + 225y = 3$.

**Proposition 2.** *Soient $a$ et $b$ deux entiers.*

$$a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux } \Leftrightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 : au + bv = 1$$

**Exercice 15.** Soient $a$, $b$ et $c$ trois entiers tels que :
- $a|bc$
- $\text{pgcd}(a,b) = 1$

Démontrer que $a|c$.

**Exercice 16.** Écrire une fonction python qui prend en paramètres deux entiers et qui retourne leur pgcd.

**Exercice 17.** Écrire une fonction python qui prend en paramètres deux entiers et qui retourne les coefficients de Bezout associés ($u$ et $v$ tels que $au + bv = pgcd(a,b)$).