Espaces vectoriels

MiMos concernés :

- Définition d'un sous-espace vectoriel
- Dimension finie : famille libre
- Dimension finie : famille liée
- Dimension finie : base
- Dimension d'un espace vectoriel
- Dimension des sous-espace vectoriels

Caractérisation des sous-espaces vectoriels

Proposition 1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F une partie de E ($F \subset E$). Alors F est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si :*
- $0_E \in F$
- $\forall (u,v) \in F^2, u+v \in F$ *(stabilité par addition)*
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in F, \lambda u \in F$ *(stabilité par multiplication par un scalaire)*

Exercice 1. Soit $F = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | 2x-3y=0\}$. F peut aussi se noter $F = \{(x,y) | 2x-3y=0\}$.
1. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter graphiquement F.

Exercice 2. Soit $F = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | -x+5y=0\}$.
1. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter graphiquement F.

Exercice 3. Soit $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+y+2z-t=0\}$.
1. Prouver que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Représenter graphiquement G.

Exercice 4. Soit $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y=1\}$.
1. Représenter graphiquement H.
2. Prouver que H n'est pas un espace-vectoriel.

Exercice 5. Soit $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x-y^2=0\}$.
1. Représenter graphiquement H.
2. H est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer (démontrer) si les sous-espaces suivants sont des espaces vectoriels :
1. $F = \{f \in E | f(2) = 2 \text{ et } f'(3) = 0\}$
2. $G = \{g \in E | f \text{ est croissante}\}$
3. $H = \{h \in E | \forall x \in \mathbb{R}, h(x-3) = h(x)\}$

Familles libres, familles liées

Définition 1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(u_1, u_2, ..., u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est **libre** si :*

$$\forall (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

*On dit que cette famille est **liée** si ce n'est pas le cas, autrement dit, si :*

$$\exists (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \neq (0,0,...,0), \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = 0$$

Définition 2. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(u_1, u_2, ..., u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On note $Vect(u_1, u_2, ..., u_n)$ l'ensemble $\{x \in E | \exists (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n : x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n\}$. Autrement dit, $Vect(u_1, u_2, ..., u_n)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $(u_1, u_2, ..., u_n)$.*

Exercice 7. Soit $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
1. Prouver que la famille (u_1, u_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter u_1 et u_2.

Exercice 8. Soit $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
1. Prouver que la famille (u_1, u_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.
2. Représenter u_1 et u_2.

Exercice 9. Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[-1;1]$ dans $\mathbb{R}$. Prouver que les familles suivantes sont libres :
1. $\{x \mapsto x^2, x \mapsto x^3\}$
2. $\{\text{arcin}, \text{arccos}\}$

Exercice 10. Pour quelle(s) valeur(s) de α la famille $(1,1)$ et $(2,\alpha)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^2$? Une famille liée ?

Exercice 11. Prouver que la famille $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12. Prouver que la famille $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \}$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13. Soit (u, v, w, t) une famille liée de $\mathbb{R}$. Prouver qu'au moins un des quatre vecteurs est combinaison linéaire des trois autres.

Exercice 14. Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Prouver que la famille (u, v) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15. Soit $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Prouver que la famille (u, v) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 16. Prouver que la famille $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 17. Donner une famille génératrice de l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ solutions de $y'' + y' + y = 0$.

Exercice 18. Soit $r \in \mathbb{R}$. Trouver une famille génératrice de l'espace vectoriel des suites réelles de raison r. Cette famille est-elle libre ?

Exercice 19. Soit $\{u, v\}$ une famille génératrice d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Soit u' et v' deux autres vecteurs de E. On suppose que $u \in \text{Vect}(\{u', v'\})$ et $v \in \text{Vect}(\{u', v'\})$.
1. Que signifie $u \in \text{Vect}(\{u', v'\})$?
2. Prouver que $\{u', v'\}$ est une famille génératrice de E.

Bases

Définition 3. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit que la famille $(u_1, u_2, ..., u_3)$ est une base de E si cette famille est une famille libre est génératrice de E.*

Exercice 20. Prouver que $\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 21. Prouver que la famille $\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} \}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 22. Prouver que $(1+X, 2+X^2, 1-X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Dimension d'un espace vectoriel

Définition 4. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit que E est de* ***dimension finie*** *si E admet une famille génératrice finie.*

Proposition 2. *Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors :*

- *E admet au moins une base*
- *toutes les bases de E ont le même cardinal (même nombre d'éléments)*

Le nombre d'éléments d'une base s'appelle la ***dimension*** *de E, noté dim(E).*

Proposition 3. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, ..._{,3})$ une famille de vecteurs de E. Alors il y a équivalence entre :*
1. $\mathcal{F}$ est une base de E
2. $\mathcal{F}$ est une famille libre de E
3. $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E

Proposition 4. *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :*
1. Toute famille génératrice de E à au moins n éléments.
2. Toute famille libre de E a au plus n éléments.
3. Toute base de E a exactement n éléments.
4. Toute famille de E d'au moins $n+1$ éléments est liée.

Exercice 23. Soit $\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix} \}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
1. Rappeler la dimension de $\mathbb{R}^3$.
2. Prouver que la famille de vecteurs ci-dessus est liée.

Exercice 24. Soit (e_1, e_2, e_3) une famille libre d'un espace vectoriel de dimension 3. Prouver que cette famille est génératrice.

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*
1. F est de dimension finie et dim$(F) \leq$ dim(E)
2. dim$(F) =$ dim$(E) \Leftrightarrow F = E$

Théorème 2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :*

$$dim(F+G) = dim(F) + dim(G) - dim(F \cap G)$$

Exercice 25. Soit $i = (1,0)$ et $e = (1,1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
1. Déterminer $F = \text{Vect}(i)$ et $G = \text{Vect}(e)$.
2. Déterminer $F + G$.

Exercice 26. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E définis par $F_1 = \text{Vect}(\{u_1, u_2, u_3\})$ et $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + 3z = 0\}$, où $u_1 = \begin{pmatrix}7\\2\\-1\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-1\end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.
1. Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.
2. Déterminer une base de F_2.
3. Établir que $F_1 = F_2$.