Fonctions linéaires

MiMos concernés :
— Définition d'une application linéaire
— Exemples d'applications linéaires
— Applications linéaires en dimension finie

Définition d'une application linéaire et exemples

Définition 1. *Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On dit que la fonction $f : E \to F$ est linéaires si :*
— *$\forall (u, v) \in E^2, f(u + v) = f(u) + f(v)$ (compatibilité de f avec les lois $+$)*
— *$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, f(\lambda u) = \lambda f(u)$ (compatibilité avec les lois $.$)*

Exercice 1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une fonction linéaire.
1. Prouver que $f(0_E) = 0_F$.
2. Prouver que $\forall u \in E, f(-u) = -f(u)$.

Exercice 2. Soit $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+3y, -x+z) \end{array}$. Prouver que f est linéaire.

Exercice 3. Soit $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, -x+y, y+2z) \end{array}$. On note (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1. Prouver que f est linéaire.
2. Calculer $f(i)$, $f(j)$ et $f(k)$. On écrira ces trois vecteurs en colonnes.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Calculer AX.

Exercice 4. Prouver que $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & x & \mapsto & (2x, -x, +\frac{x}{4}) \end{array}$ est linéaire.

Exercice 5. La fonction $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, -x+y, y+2z^2) \end{array}$ est-elle linéaire ?

Exercice 6. Soit $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & P(X) & \mapsto & 2P'(X) \end{array}$.
1. Quels sont les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$?
2. Donner une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Prouver que f est linéaire.

Exercice 7. Prouver que $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(0) - 2P'(X) \end{array}$ est linéaire.

Applications linéaires en dimension finie

Définition 2. *Soit $f : E \to F$ une fonction linéaire.*
*On appelle **noyau de** f, noté $Ker(f)$, l'ensemble des antécédents de 0 par f :*

$$Kerf(f) = \{x \in E | f(x) = 0\}$$

*On appelle **image de** f, notée $Im(f)$, l'ensemble des $y \in F$ qui ont un antécédent par f :*

$$Im(f) = \{y \in F | \exists x \in E : y = f(x)\}$$

Exercice 8. Soit $f : E \to F$ une fonction linéaire.
1. Prouver que $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Prouver que $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 9. Soit $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (-2x+y, x-2y) \end{array}$. On note (i,j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
1. Prouver que f est linéaire.
2. Calculer, puis représenter $f(i)$ et $f(j)$.
3. Déterminer $Ker(f)$.
4. Déterminer $Im(f)$.

Exercice 10. Soit $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (3x-y, x+3y) \end{array}$. On note (i,j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
1. Prouver que f est linéaire.
2. Calculer, puis représenter $f(i)$ et $f(j)$.
3. Déterminer et représenter $Ker(f)$.
4. Déterminer et représenter $Im(f)$.

Exercice 11. Soit $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x, -\frac{x}{2}) \end{array}$. On note (i,j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
1. Prouver que f est linéaire.
2. Calculer, puis représenter $f(i)$ et $f(j)$.
3. Déterminer et représenter $Ker(f)$.
4. Déterminer et représenter $Im(f)$.

Exercice 12. Soit $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & P(X) & \mapsto & (P(1), P(\frac{1}{2}), P(2)) \end{array}$. On note (i,j,k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1. Prouver que f est linéaire.
2. Déterminer $Ker(f)$.
3. Justifier que f est bijective.
4. Trouver trois polynômes P_1, P_2 et P_3 tels que $f(P_1)=i$, $f(P_2)=j$ et $f(P_3)=k$. Comment s'appellent ces trois polynômes ?