Fonctions linéaires - Suite

MiMos concernés :
– Matrice d'une application linéaire
– Propriétés des applications linéaires

Matrice d'une application linéaire

Définition 1. *Soit $f : E \to F$ une fonction linéaire (E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels).*
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ une base de F. On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ la matrice :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

où $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ *est la colonne des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$, pour $1 \leq j \leq p$.*

Exercice 1. Soit la fonction linéaire $\begin{array}{llll} f : & \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto (x+3y, -x+z) \end{array}$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
1. Préciser ce qu'est $\mathcal{B}$. Calculer les images des vecteurs de cette base.
2. Déterminer $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
3. Soit $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Calculer $f(u)$ à l'aide de A.

Exercice 2. Soit la fonction linéaire $\begin{array}{llll} f : & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^4 \\ & (x,y) & \mapsto (x+y, y, 2x, 3x+y) \end{array}$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
1. Préciser ce qu'est $\mathcal{B}$. Calculer les images des vecteurs de cette base.
2. Déterminer $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
3. Soit $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer $f(u)$ à l'aide de A.

Exercice 3. Soit la fonction linéaire $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. One donne $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 12 & 4 \end{pmatrix}$
1. Déterminer p et n.
2. Donner l'expression de f.
3. Calculer $f\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soit la fonction linéaire $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. One donne $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$
1. Déterminer p et n.
2. Donner l'expression de g.
3. Calculer $g\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. On reprend les fonctions f et g des deux exercices précédents.
1. $g \circ f$ est-elle définie ? Si oui, préciser son ensemble d'arriver, son ensemble de départ, ainsi que sa matrice relativement aux bases canoniques.
2. Mêmes question pour $f \circ g$.

Propriétés des applications linéaires

Définition 2. *Soit $f : E \to F$ une fonction linéaire.*
*On appelle **noyau de** f, noté $Ker(f)$, l'ensemble des antécédents de* 0 *par* f *:*

$$Kerf(f) = \{x \in E | f(x) = 0\}$$

Exercice 6. Soit $f : E \to F$ une fonction linéaire.
1. Prouver que $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Prouver que $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 7. Soit $\begin{array}{lcl} f: & \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z) & \mapsto (x+y-z, 2x+2y-z, z+y, -3z-3y) \end{array}$.
1. Déterminer Ker(f).
2. Quelle est le rang de f ?

Exercice 8. Soit $\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \int_0^x f(t)dt \end{array}$.
1. Que signifie $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
2. Justifier que f est linéaire.
3. Déterminer Ker(f).

Exercice 9. Soit $\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f - 3f' \end{array}$.
1. Que signifie $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
2. Justifier que f est linéaire.
3. Déterminer Ker(f).

SEV et applications linéaires

Exercice 10. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$. On considère $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2y - x = 0 \right\}$.
1. Justifier que D est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$. Quelle est la dimension de D ?
2. Trouver l'équation de la droite D', perpendiculaire à D. D' est-elle un sev de $\mathbb{R}^2$?
3. Soit $w \in \mathbb{R}^2$. Trouver $a \in D$ et $b \in D'$ tels que $w = a + b$. Indication : donner un nom aux coordonnées de ces vecteurs et écrire un système.
4. a et b sont-ils uniques ?
5. On considère la fonction f qui à $w = a + b$ associe $a - b$. Donner l'expression de f. Indication : utiliser les formules trouvées à la question 3.
6. f est-elle linéaire ?
7. Calculer l'image par f de 3 vecteurs différents.
8. Quelle nom donner à f ?
9. Donner la matrice de f relativement aux bases canoniques.

Exercice 11. On se place dans $\mathbb{R}^2$.
1. Trouver l'expression de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y - 3x = 0$.
2. Donner la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12. On se place dans $\mathbb{R}^3$.
1. Trouver l'expression de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $z - y - 2x = 0$.
2. Donner la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.