Matrices

MiMos concernés :
— Définition d'une matrice
— Multiplication de matrices
— Définition de l'inverse d'une matrice
— Calcul de l'inverse d'une matrice

Opérations sur les matrices

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
1. Donner un exemple pour A.
2. Soit B une autre matrice. A quelle condition peut-on calculer $A+B$?
3. Donner un exemple d'une telle matrice B et calculer $A+B$.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer λA.

Exercice 2. Un sucre d'orge est constitué de 40 grammes de sucre rouge, 30 grammes de sucre vert et 35 grammes de sucre bleu. On le représente par la colonne $\begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 35 \end{pmatrix}$. Les prix au gramme des sucres rouge, vert et bleu sont respectivement 0.6, 0.5 et 0.7. On représente ces prix par la ligne $\begin{pmatrix} 0.6 & 0.5 & 0.7 \end{pmatrix}$.
1. Quel est le prix du sucre d'orge ?
2. Comment définir le produit d'une ligne $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ par une colonne $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$?

Exercice 3. Calculer les produits suivants :

1. $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$

Exercice 4. Effectuer le produit des matrices :

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix}$

Exercice 5. Trouver :
1. une matrice A et une matrice B de telle sorte que le produit AB ne soit pas défini
2. une matrice A et une matrice B telles que AB soit défini et BA ne soit pas défini

Exercice 6. Trouver $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $MN \neq NM$.

Exercice 7. Trouver une matrice $A \neq 0$ et une matrice $B \neq 0$ telles que $AB = 0$. Trouver C et D telles que $AC = AD$ et $C \neq D$.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.
1. Calculer $A(\frac{\pi}{3})$.
2. Calculer $A(\frac{\pi}{3}) \times u$.
3. Calculer $A(\theta) \times A(\theta')$.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Prouver par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Inversion de matrices

Exercice 10. Soit $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

1. Résoudre le système

$$\begin{cases} -2x + y & = x' \\ 3x + \frac{5}{2}y & = y' \end{cases}$$

2. En déduire $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}^{-1}$.

Exercice 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Que vaut $A^3 - 3A^2 + A - 5I_3$?
3. Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 12. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$.
2. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 13. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer AA'.
2. En déduire une condition pour que A soit inversible et donner, dans ce cas, l'inverse de A.

Exercice 14. Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ par deux méthodes.

Exercice 15. En utilisant la méthode de Gauss, calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & \frac{-13}{2} & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^{-1}.

Exercice 17. A et B sont deux matrices carré de même taille telles que $AB = A + B$. Prouver que $AB = BA$ (*indication* : considérer $(A - I_n)(B - I_n)$).