Nombres premiers et congruences

MiMos concernés :
— Nombres premiers
— Congruences

Nombres premiers

Exercice 1. Décomposer en facteurs premiers les nombres : 315, 312, 1225, 529. A l'aide de décompositions en facteurs premiers, calculer :
1. pgcd(45,12) et ppcm(45,12)
2. pgcd(91,28) et ppcm(91,28)
3. pgcd(3150,5880) et ppcm(3150,5880)

Exercice 2. Déterminer le nombre de diviseurs de 5880.

Exercice 3. Soit p un nombre premier. Déterminer le nombre de diviseurs de p^n.

Exercice 4. Soit n un entier. On suppose que la décomposition de n en facteurs premiers est $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$. Déterminer le nombre de diviseurs de n.

Exercice 5. Prouver par l'absurde qu'il existe une infinité de nombre premiers.

Exercice 6. Soit p un nombre premier. Prouver que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

Congruences

Exercice 7. Déterminer les congruences :
1. modulo 5 de 12, 45, 87, 104
2. modulo 7 de 14, 85, 24, 46
3. modulo 8 de 12, 204, 36, 48

Exercice 8. Montrer que $10^6 \equiv 1[7]$

Exercice 9. Trouver le plus petit entier naturel auquel est congru $2n^2$ modulo 5, en fonction de n.

Exercice 10. Trouver le plus petit entier naturel auquel est congru $3n - 5$ modulo 7, en fonction de n.

Exercice 11. Trouver le plus petit entier naturel auquel est congru $n^2 - 2n + 3$ modulo 4, en fonction de n.

Exercice 12. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5n^3 + n$ est divisible par 6.

Exercice 13. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^7 - n$ est divisible par 7.

Exercice 14. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 15. Déterminer les restes de la division euclidienne par 11 de 12^{15}, 10^7, 78^{15}, 13^{12}.

Exercice 16. Déterminer le reste de la division euclidienne de 91234^{2016} par 7.

Exercice 17. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{55} par 7.

Exercice 18. Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{789} par 12.

Exercice 19. Soient a et n deux entiers naturels. On suppose que a est premier avec n.
1. A l'aide d'une égalité de Bezout, justifier l'existence d'un entier a' tel que $aa' \equiv 1[n]$.
2. Résoudre $4x \equiv 1[11]$.

Exercice 20. Résoudre $4x \equiv 2[5]$.

Exercice 21. a et b sont deux entiers relatifs et n est un entier naturel non nul. Prouver que $a \equiv b[n] \Rightarrow a^n \equiv b^n[n^2]$.