Probabilités

Dénombrement

Définition 1. *On note $A_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$. A_n^k est le nombre de k-uplets d'éléments deux à deux distincts, d'un ensemble à n éléments.*
On dit aussi que A_n^k est le nombre d'arrangements de k éléments parmi n.

Exercice 1. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$.
1. Combien y a-t-il de couples d'éléments distincts de E ?
2. Lister tous ces couples.

Exercice 2. Combien y a-t-il d'arrangements de 3 éléments parmi 10 ?

Exercice 3. Prouver que $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Exercice 4. Une urne contient les 26 lettres de l'alphabet. Combien de mots de 5 lettres peut-on former ?

Définition 2. *On note C_n^k ou $\binom{n}{k}$ le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments.*
On prouve que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}$.

Exercice 5. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$.
1. Combien y a-t-il de parties à 2 éléments de E ?
2. Lister toutes ces parties.

Exercice 6. E est un ensemble de cardinal 20.
1. Combien y a-t-il de partie(s) à 1 élément ? Les lister.
2. Combien y a-t-il de partie(s) à 20 éléments ? Les lister.
3. Combien y a-t-il de parties à 5 éléments ?

Exercice 7. Prouver que $\binom{k}{n} = \binom{n-k}{n}$

Exercice 8. Combien y a-t-il de façons de piocher 2 cartes au hasard dans un jeu de 52 cartes ?

Exercice 9. Combien y a-t-il de façon de classer 20 personnes,
1. sans ex-æquo ?
2. avec exactement 2 personnes ex-æquo ?

Exercice 10. 45 personnes sont présentes à une réception. Chaque personne serre la main (une fois) à chacune des autres personnes. Combien y a-t-il de poignées de mains ?

Probabilités

Définition 3. *Pour modéliser une expérience aléatoire, il faut :*
- *un ensemble Ω, appelé univers, ou ensemble des issues possibles, ou encore ensemble des possibles*
- *un ensemble d'événements $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$*
- *une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0;1]$*

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Remarque 1. *L'ensemble $\mathcal{A}$ des événements et la fonction $\mathbb{P}$ doivent bien-sur vérifier certaines propriétés, qui ne seront pas évoquées ici.*

Remarque 2. *Si Ω est fini, on prendra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.*

Exemple 1. *On souhaite modéliser l'expérience aléatoire consistant à jeter un dé équilibré. On choisit :*
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
- *si $A \in \mathcal{A}$, on définit $\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$*

Par exemple $A_1 = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ est l'événement "le dé tombe sur une face paire" et $A_2 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ est l'événement "le dé ne tombe pas sur 1". On a $\mathbb{P}(A_1) = \frac{card(A_1)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A_2) = \frac{card(A_2)}{card(\Omega)} = \frac{5}{6}$.

Exercice 11. Soit Ω un ensemble fini. On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$.
1. Prouver que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Prouver que $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Exercice 12. Une personne s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes ; il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ? Quelles sont les probabilités des événements suivants : "il est tout en noir" ; "une seule pièce est noire sur les trois".

Exercice 13. Un QCM comporte 10 questions. Pour chaque question, 4 réponses sont possibles, et une seule est exacte. On coche au hasard une seule réponse par question. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 5 bonnes réponses ?

Exercice 14. On jette simultanément deux dés non truqués.
1. Proposer un espace probabilisé permettant de modéliser cette expérience aléatoire.
2. Calculer la probabilité de l'événement "la somme des dés est supérieure à 5".

Exercice 15. Trois chasseurs tirent sur un oiseau. Les trois chasseurs ont respectivement 70%, 50% et 90% de chances d'atteindre leur cible. Quelle est la probabilité que l'oiseau soit touché ?

Exercice 16. Lors d'une loterie, 300 billets sont disponibles ; 4 billets sont gagnants. On achète 10 billets, quelle est la probabilité de gagner au moins un lot ?

Définition 4. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$ deux événements. On dit que A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.*

Exercice 17. La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie A est p donnée ; dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie B avec une probabilité q donnée aussi ; on suppose que les maladies sont indépendantes : quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ? Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?

Exercice 18. Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements "tirer un roi" et "tirer un pique" sont-ils indépendants ? quelle est la probabilité de "tirer un roi ou un pique" ?