Révisions

Congruences

Exercice 1. Soient a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$. Prouver que :
1. $a - b \equiv c - d[n]$
2. $ac \equiv bd[n]$

Exercice 2. Soient a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$. Prouver que les assertions suivantes sont fausses :
1. $ab \equiv cd[n]$
2. $a + b \equiv c + d[n]$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que $7^{2n+1} + 5^{2n+1}$ et $7^{2n} - 5^{2n}$ sont divisibles par 6.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 - 6n + 3 \equiv 0[3]$. Prouver que $n \equiv 0[3]$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que $7^n \equiv 1[6]$ et que $5^n \equiv 1[6] \Rightarrow n \equiv 0[2]$.

Exercice 6. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3489^{3009} par 5.

Exercice 7. Déterminer le reste de la division euclidienne de 51236^{99} par 11.

Équations diophantiennes

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $48x + 26y = 4$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $7x + 21y = 14$.

Algèbre linéaire

Exercice 10. On note $\mathcal{B}_1 = (1, X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$ et $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}_1[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P(X) & \mapsto & \big(P(0), P'(0)\big) \end{array}$$

1. Que signifie $\mathbb{R}_1[X]$?
2. Prouver que Φ est linéaire.
3. Calculer $\Phi(1)$ et $\Phi(X)$.
4. Déterminer $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\Phi)$.
5. Calculer $\det(A)$.
6. Justifier que Φ est une bijection.
7. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\Phi^{-1})$.
8. Calculer $\Phi^{-1}(\overrightarrow{i})$ et $\Phi^{-1}(\overrightarrow{j})$

Exercice 11. On note $\mathcal{B}_1 = (1, X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$ et $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}_1[X] & \to & \mathbb{R}^2 \\ P(X) & \mapsto & \big(P(1), P(2)\big) \end{array}$$

1. Que signifie $\mathbb{R}_1[X]$?
2. Prouver que Φ est linéaire.
3. Calculer $\Phi(1)$ et $\Phi(X)$.
4. Déterminer $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(\Phi)$.
5. Calculer $\det(A)$.
6. Justifier que Φ est une bijection.
7. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(\Phi^{-1})$.
8. Calculer $\Phi^{-1}(\overrightarrow{i})$ et $\Phi^{-1}(\overrightarrow{j})$