Révisions 2

Probabilités

Définition 1. *On considère n expériences de Bernoulli de paramètre p, indépendantes. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès au cours de ces n expériences. On dit alors que X suit une* ***loi binomiale*** *de paramètres n et p. On note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. On peut prouver que :*
- $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{p} p^k (1-p)^{n-k}$
- $\mathbb{E}(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$

Exercice 1. Dans une région pétrolifère, la probabilité qu'un forage conduise à une nappe de pétrole est 0,1.
1. Justifier que la réalisation d'un forage peut être assimilée à une épreuve de Bernoulli.
2. On effectue 9 forages.
a. Quelle hypothèse doit-on formuler pour que la variable aléatoire X correspondant au nombre de forages qui ont conduit à une nappe de pétrole suive une loi binomiale ?
b. Sous cette hypothèse, calculer la probabilité qu'au moins un forage conduise à une nappe de pétrole. En donner la valeur à 10^{-3} près.
c. En moyenne, sur les 9 forages, combien vont mener à une nappe de pétrole ?

Exercice 2. Un constructeur de composants produit des résistances. La probabilité qu'une résistance soit défectueuse est égale à 5.10^{-3}. Dans un lot de 1000 résistances, quelle est la probabilité d'avoir :
a. Exactement deux résistances défectueuses ?
b. Au plus deux résistances défectueuses ?
c. Au moins deux résistances défectueuses ?
d. En moyenne, sur les 1000 résistances, combien sont défectueuses ?

Exercice 3. Afin de créer une loterie, on place dans une urne n boules différentes ($n \geq 3$) dont deux et deux seulement sont gagnantes. On choisit au hasard deux boules de l'urne en remettant la première boule tirée avant d'en tirer une seconde.
1. On suppose dans cette question que $n = 10$. Y désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de boules gagnantes parmi les deux choisies. Déterminer la loi de probabilité de Y.
2. On revient au cas général. Calculer la probabilité p_n d'avoir exactement une boule gagnante parmi les deux.

Exercice 4. On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres 20 et 0,4.
1. Calculer $\mathbb{P}(X = 3)$;$\mathbb{P}(X = 17)$;$\mathbb{P}(X = 10)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1)$;$\mathbb{P}(X \geq 18)$;$\mathbb{P}(X \leq 10)$.

Exercice 5. On effectue 5 tirages avec remise dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer au moins un as ?

Exercice 6. On tire simultanément deux cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer deux cartes différentes ?

Arithmétique

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $56x + 152y = 64$.

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $63x + 181y = 45$.

Algèbre linéaire

Exercice 9. On note $\mathcal{T}_3^{\geq}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients réels. On note $\mathcal{T}_3^{<}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures strictes.
1. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{T}_3^{\geq}(\mathbb{R})$ et un exemple de matrice de $\mathcal{T}_3^{<}(\mathbb{R})$.
2. Prouver que $\mathcal{T}_3^{\geq}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Trouver une base de $\mathcal{T}_3^{\geq}(\mathbb{R})$. Justifier.
4. Prouver que $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_3^{\geq}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{T}_3^{<}(\mathbb{R})$.

Exercice 10. Soit

$$f : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto (3x-y, x+3z, 2x-y-3z) \end{array}$$

On note (i,j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
1. Prouver que f est linéaire.
2. Déterminer $Ker(f)$.
3. Déterminer $Im(f)$.
4. A-t-on $\mathbb{R}^3 = Ker(f) \oplus Im(f)$?