Variables aléatoires

Définition 1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. On appelle* ***variable aléatoire*** *une fonction de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *:*

$$\begin{array}{rcl} X : \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

— *si* $X(\Omega)$ *est fini, on dit que* X *est* ***discrète*** *et on peut écrire* $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
— *si* X *est discrète, on note souvent* $\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}) = p_i$
— *si* X *est discrète, on appelle* ***loi de probabilité*** *de* X *les* $(x_1, p_1), (x_2, p_2), ..., (x_n, p_n)$ *(on les présente souvent dans un tableau)*

Exemple 1. *Le jet de dé :* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. *On considère* X *la variable aléatoire qui à une face du dé associe le reste de la division euclidienne de la cette face par 4 :*

$$\begin{array}{rcl} X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

X a pour loi $\begin{array}{c|c|c|c|c} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p_i & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$.
On a : $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 2\}) = \mathbb{P}(\{2, 6\}) = \frac{2}{6}$.

Exercice 1. On jette simultanément deux dés équilibrés. On note X la variable aléatoire qui donne la somme des deux dés. Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 2. On considère le jet d'une pièce truquée qui a une probabilité $0 < p < 1$ de tomber sur face. Soit X la variable aléatoire qui associe 1 si la pièce tombe sur face et 0 sinon.
1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Comment s'appelle une telle loi ?

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de loi $\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ \hline p_1 & p_2 & ... & p_n \end{array}$. A l'aide de la définition, prouver que $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Espérance, variance et écart-type

Définition 2. *Soit* X *une variable aléatoire de loi*

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ \hline p_1 & p_2 & ... & p_n \end{array}$$

On appelle :

— ***espérance*** *de* X *la quantité :* $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$
— ***variance*** *de* X *la quantité :* $V(X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big)$
— ***écart type*** *de* X *la quantité :* $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exercice 4. On considère un lancé de dé ordinaire. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre réel associé à la face obtenue.
1. Donner la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$.

Exercice 5. Un joueur de poker a 1 chance sur 4 de gagner un coup. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si le coup est gagné et 0 sinon.

1. Donner la loi de probabilité de X.

Le joueur a du payé 10, pour éventuellement gagner 30. On note Y la variable aléatoire qui mesure le gain du joueur.
2. Exprimer Y en fonction de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Exercice 6. On joue à la roulette en misant 1 euro sur rouge ou sur noir. Il y a 37 numéros : 18 rouges, 18 noirs, et le 0, qui est vert. Si on gagne, on ramène 2 fois la mise. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si on gagne et 0 si on perd. On note Y la variable aléatoire qui mesure les gains en euros.
1. Donner la loi de X.
2. Exprimer Y en fonction de X.
3. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 7. Soit X et Y deux variables aléatoires de même loi et a un réel.
1. Prouver que $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$
2. Prouver que $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
3. Comment qualifier $\mathbb{E}$?
4. Prouver que $V(aX) = a^2V(X)$.

Exercice 8. X est une variable aléatoire de loi $\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ \hline p_1 & p_2 & ... & p_n \end{array}$. Prouver que :
1. $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
2. En déduire que $V(X) = \sum_{i=1}^{n} pix_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} p_ix_i)^2$.

Exercice 9. Soient X et Y deux variables aléatoires de même loi. On suppose que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Prouver que $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Modélisation

Exercice 10. On veut modéliser un dé équilibré à 6 faces.
1. Créer un script python **probas.py**.
2. Importer toutes les fonctions de la librairie **random**.
3. Écrire une fonction python nommée "de" qui ne prend pas d'argument et qui retourne un entier compris (au sens large) entre 1 et 6 avec une probabilité $\frac{1}{6}$.
4. Ajouter l'instruction **print("Le dé est tombé sur : "+str(de()))**.
5. Exécuter le script.

Exercice 11. Dans le fichier **probas.py**, écrire une fonction python nommée "pileOuFace" qui ne prend pas d'argument et qui retourne 0 ou 1 avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

Théorème 1. *Loi des grands nombres.*
Soit $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Alors

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} = \mathbb{E}(X_1)\right) = 1$$

Exercice 12. Dans le fichier **probas.py**, écrire une fonction **moyenne(n,VA)** qui :
- a deux arguments : un entier **n** et une fonction **VA**
- exécute **n** fois la fonction **VA** et ajoute le résultat obtenu dans une variable **somme**
- retourne la moyenne **somme / n**

Tester par exemple **moyenne(100,de)**.

Exercice 13. Écrire une fonction **lgn(N,VA)** qui affiche, pour i parcourant 1, 10, 100, ..., N, la valeur retournée par **moyenne(i,VA)**.

Exercice 14. Calculer une espérance grâce à la loi des grands nombres.
1. Créer une fonction **deuxDes()** qui retourne la somme des faces de deux dés jetés au hasard.
2. Utiliser la fonction **lgn()** de l'exercice précédent pour trouver la valeur de l'espérance de la somme des deux dés.
3. Vérifier le résultat à l'aide de l'exercice 1.

Exercice 15. Retrouver grâce à l'ordinateur que l'espérance d'un dé équilibré est 3,5.