Dérivée d'une fonction en un point et sur un intervalle

Exercice 1. Le but de l'exercice est de prouver que la dérivée de la fonction cos est $-\sin$.
1. Rappeler la définition de la dérivée en un point.
2. Retrouver la formule $\cos p - \cos q$ à l'aide de l'exponentielle complexe.
3. En déduire $\cos'$.

Exercice 2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 3. Soit f une fonction dérivable en un point x_0. Montrer que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0)$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$.
1. Prolonger f par continuité en 0. On appelle g ce prolongement.
2. Etudier la dérivabilité de g.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2+3x-4}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer l'ensemble sur lequel f est dérivable et calculer $f'(x)$.

Exercice 6. On considère la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. f est-elle de classe C^1 ?

Exercice 7. On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x+5}$.
1. Soit $a \in [0;+\infty[$. Déterminer $f'(a)$.
2. Donner l'équation la tangente à Γ_f au point d'abscisse $\frac{11}{3}$.
3. Peut-on dire que Γ_f a une tangente au point d'abscisse 0 ?

Exercice 8. Donner une valeur approchée de $\sqrt{10001}$ en approximant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ par l'équation de sa tangente en un point bien choisi.

Exercice 9. Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
1. Prouver que $f+g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une formule pour $(f+g)'$.
2. Prouver que $f \times g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une formule pour $(f \times g)'$.

Exercice 10. On donne $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.
1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Prolonger f par continuité quand cela est possible.

Exercice 11. Soit $f(x) = \frac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}$.
1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Prolonger f par continuité en $\frac{\pi}{4}$.

Calcul de dérivées

Exercice 12. Étudier les variations des fonctions suivantes :
1. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$
2. $x \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$

Exercice 13. En utilisant la formule de dérivation d'une composée $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$, démontrer la formule donnant $(\ln(u))'$, où u est une fonction strictement positive, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14. Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir précisé la formule à utiliser :
1. $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 2)$
2. $g(x) = \ln(\sqrt[5]{\cos(x)})$
3. $h(x) = e^{x^2}$
4. $i(x) = \frac{x^2+5x-2}{x^2+1}$
5. $j(x) = \sqrt{3x+1}$
6. $k(x) = (-x^2 + 2)\ln(x)$

Exercice 15. Calculer $\tan'(x)$.

Exercice 16. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire de f' si :
1. f est paire
2. f est impaire
3. f est $T-$périodique

Exercice 17. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$.
1. Calculer la dérivée m-ième de $x \mapsto x^n$.
2. Qu'obtient-on pour $m = n$?

Exercice 18. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ $(a_n \neq 0)$.
1. Calculer $P(0)$, $P'(0)$ et $P''(0)$.
2. Calculer $P^{(m)}(0)$. En déduire une formule pour a_m.
3. Réécrire $P(x)$ à l'aide des formules précédentes. La formule obtenue s'appelle formule de Taylor.

Exercice 19. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 e^x$.
1. Rappeler la formule de Leibniz.
2. Soit $n \in \mathbb{R}$. Calculer $f^{(n)}(x)$.

Exercice 20. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cos(kx)$.