Ensembles et applications

Ensembles

Exercice 1. Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Décrire, en donnant la liste de leurs éléments, les ensembles suivants :

1. $B = \{x \in A, x < 5\}$.
2. $C = \{x \in A, x > 3\}$.
3. $D = \{x \in A, x \text{ est pair}\}$.
4. $E = \{x \in A, x \text{ est un multiple de } 3\}$.
5. $F = B \cup D$.
6. $G = F \cap E$.
7. $H = A \backslash C$.
8. $I = B \cap H$.
9. $J = H \cap E$.
10. $K = J \cap D$.

Exercice 2. A et B sont deux ensembles. Montrer que $A \cap B = A \cup B$ si et seulement si $A = B$.

Exercice 3. Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4\}$. Déterminer $C = A \times B$, $D = B \times A$, $E = C \cup D$, $F = C \cap D$.

Exercice 4. Même exercice avec $A = \mathbb{N}$ et $B = \{0, 1\}$.

Exercice 5. Soit $A = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$. Décrire, en donnant la liste de leurs éléments, les ensembles suivants :

1. $B = \{x \in A, x < 10\}$.
2. $C = \{x \in A, x > 15\}$.
3. $D = \{x \in A, x \text{ est pair}\}$.
4. $E = \{x \in A, x \text{ est un multiple de } 10\}$.
5. $F = B \cup D$.
6. $G = F \cap E$.
7. $H = A \backslash C$.
8. $I = B \cap H$.
9. $J = H \cap E$.
10. $K = J \cap D$.

Exercice 6. Soient $A = \{2, 3, 5, 9\}$ et $B = \{2, 9, 7\}$. Déterminer $C = A \times B$, $D = B \times A$, $E = C \cup D$, $F = C \cap D$.

Exercice 7. Principe des tiroirs.
Soient E et F deux ensembles finis tels que Card(E)>Card(F) et $f : E \mapsto F$ une application. Prouver qu'il existe un élément de F qui a au moins deux antécédents par f.

Applications

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = -x$.
1. Tracer les graphes de f et de g.
2. Déterminer $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$ et $g \circ f$.
3. Déterminer : $f([-2, 3])$, $f(\{-2, 3\})$, $f(\mathbb{R})$, $f^{-1}([-2, 3])$, $f^{-1}(\{-2, 3\})$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.

Exercice 9. Soient f une application de E dans F, A et B deux parties de E, et X et Ydeux parties de F. Que penser des égalités suivantes ?
1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$.
4. $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application définie par $f(n) = \dfrac{n}{2}$ si n est pair, et par $f(n) = 0$ si n est impair.
1. Déterminer l'image directe de $X = \{0, 1, 2, 3\}$ par f.
2. Déterminer l'image réciproque de X par f.

Exercice 11. Soit $g : [-1; 1] \to \mathbb{R}$ définie, pour $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = sin(x)$.
1. Déterminer $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $g \circ f$.
3. Déterminer $(g \circ f)(\mathbb{R})$ et tracer le graphe de $g \circ f$.
4. Déterminer $f^{-1}(\{1\})$.
5. Déterminer $f^{-1}([0; 1])$.

Injections, surjections, bijections

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.
f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ définie, pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.
f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \dfrac{n}{2}$ si n est pair, et par $f(n) = 0$ si n est impair.
f est-elle injective ? bijective ? surjective ?

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = 2n$.
f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x$.
f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 17.
1. Montrer que $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ définit une application de l'ensemble $E = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ vers $F = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
2. Montrer que f est une bijection et déterminer sa réciproque.

Exercice 18. Soit $\begin{array}{rcl} f : [-\frac{3}{4}; 10] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (4x+3)^2 \end{array}$.
1. Déterminer l'image de f.
2. Montrer que f est une bijection de $[-\frac{3}{4}; 10[$ sur $Im(f)$ et déterminer sa réciproque.

Exercice 19. Trouver toutes les bijections f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leq n$.

Exercice 20. Trouver une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$.

Exercice 21. Prouver que $\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ (n,m) & \mapsto & 2^n(2m+1) \end{array}$ est une bijection.

Ensembles finis

Exercice 22. A et B sont deux ensembles de 10 éléments chacun.
Que peut-on dire des cardinaux de $A \cap B$, $A \cup B$, $A \times B$?

Exercice 23. Compter le nombre de surjections d'un ensemble non vide E à n éléments dans un ensemble F à trois éléments.

Exercice 24. Soient $E = \{a, b, c\}$ un ensemble à 3 éléments et $F = \{u, v\}$ un ensemble à 2 éléments.
1. Lister toutes les applications de E dans F. Dire si elles sont injectives, surjectives, bijectives.
2. Même question pour les applications de F dans E.
3. Même question pour les applications de F dans F.

Exercice 25. Déterminer le développement de $(a+b)^4$.

Exercice 26. Déterminer le développement de $(a+b)^7$.

Exercice 27. Déterminer le développement de $(1+b)^7$.

Exercice 28. Prouver que $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{k} + ... + \binom{n}{n}$.

Exercice 29. Montrer que, pour n et k deux entiers naturels avec $1 \leq k \leq n$, on a l'égalité suivante $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Exercice 30. Calculer $\binom{10}{8}$, $\binom{5}{1}$ et $\binom{50}{49}$.

Exercice 31. Compter le nombre d'injections d'un ensemble E à n éléments dans un ensemble F à m éléments.