Mathématiques Fondamentales IngéSup
Planche d'exercices communs

Dans ce document, sont précisés, pour chaque chapitre :

1. Les compétences exigibles.
2. Des exercices qui devront être traités dans chaque site :
   (a) un ou plusieurs exercices d'application.
   (b) un exercice plus exigeant, problème.

Chapitre 1. Logique et raisonnement

Compétences exigibles.

1. Logique
   — Assertions, opérations sur les assertions (négation, implication, équivalence, opérateurs "*et*" et "*ou*").
   — Propriétés sur les assertions.
   — Quantificateurs.
2. Raisonnements : direct, cas par cas, par contraposée, par l'absurde, par contre-exemple, par récurrence.
3. Ensembles
   — Définitions : inclusion, union, intersection, complémentaire, différence.
   — Produit cartésien.
   — Injection, surjection : définition.
   — Bijection : définition.
   — Bijection d'une fonction composée.
4. Ensembles finis
   — Définition du cardinal.
   — Lien fonctions injective/surjective/bijective et cardinal.
   — Nombre d'applications définies sur un ensemble fini à valeurs dans un ensemble fini (injections, bijections).
   — Parties d'un ensemble fini. Cardinal.
   — Définition d'un combinaison. Binôme de Newton.
5. Propriétés des réels
   — Relation d'ordre. Propriétés.
   — Partie entière (définition, propriétés).
   — Valeur absolue (définition, propriétés). Résolution d'inéquations.
   — Définition d'un voisinage de $\mathbb{R}$.
6. Borne inférieure, borne supérieure
   — Définitions d'un minorant, majorant, ensemble borné.
   — Définitions d'un maximum, minimum d'une partie de $\mathbb{R}$.
   — Borne inférieure, borne supérieure : définition, caractérisation.

Exercices communs

I. Exercices d'application.

1. Exercice.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Compléter par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$.

1. $x^2 = 4$ ...... $x = -2$.
2. $|x| = -x$ ...... $x \in]-\infty, 0]$.
3. $x = \frac{\pi}{2}$ ...... $\sin(2x) = 0$.
4. $x \in \mathbb{Z}$ ...... $|\cos(\pi x)| = 0$.

2. Exercice. Modus Ponens.
Soient P et Q deux assertions.

1. Dresser la table de vérité de (P et $P \Rightarrow Q$).
2. Déduire de la question précédente la table de vérité de (P et $P \Rightarrow Q$) $\Rightarrow Q$.
3. Que constate-on ?

3. Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'expression

$$1.1! + 2.2! + ... + n.n!$$

Indication : établir une formule pour n petit, puis la démontrer par récurrence pour n quelconque.

4. Exercice. Soit $A = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$. Déterminer, en donnant la liste de leurs éléments, les ensembles suivants :

1. $B = \{x \in A, x < 10\}$.
2. $C = \{x \in A, x \text{ est pair}\}$.
3. $D = B \cup C$.
4. $E = B \cap C$.
5. $F = A \setminus C$.

5. Exercice.
Soient a et b deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées (resp. minorées) ? Si oui, quelles sont leur borne supérieure (resp. inférieure) ?

1. $\{a + bn, n \in \mathbb{N}\}$
2. $\{a + (-1)^n b, n \in \mathbb{N}\}$
3. $\{a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$
4. $\{(-1)^n a + \frac{b}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$

Chapitre 2. Fonctions d'une variable réelle

Compétences exigibles.

1. Notions de fonctions
   — Domaine de définition : définition, à savoir déterminer.
   — Définitions d'une fonction majorée, minorée, bornée.
   — Définition du sens de variation d'une fonction.
   — Définitions d'une fonction paire, impaire, périodique. Savoir démontrer qu'une fonction présente l'une de ces caractéristiques.
2. Limites et fonctions continues
   — Les définitions (avec quantificateurs) des limites ne sont pas à connaître par coeur, mais comprendre (proposer éventuellement un exercice plus "exigeant" de manipulation de ces définitions).
   — Limites à gauche, à droite : définition, à savoir déterminer.
   — Théorème des gendarmes.
3. Continuité en un point
   — Définition de la continuité en un point.
   — Prolongement par continuité.
   — Caractérisation séquentielle de la continuité.
4. Continuité sur un intervalle. Théorème des valeurs intermédiaires. Énoncé et application.
5. Théorème de la bijection. Énoncé et application.
6. Dérivée d'une fonction
   — Définition. Taux d'accroissement.
   — Tangente et approximation affine au voisinage d'un point.
7. Calculs de dérivées
   — Dérivées des fonctions usuelles.
   — Opérations sur les dérivées.
   — Dérivée d'une fonction composée, de la fonction réciproque d'une fonction.
   — Dérivées successives. Formule de Leibniz.
8. Extremum local et théorème de Rolle
   — Définition et caractérisation d'un extremum local.
   — Théorème de Rolle. Énoncé et application.
9. Théorème des accroissements finis
   — Énoncé et application du TAF.
   — Inégalité des accroissements finis.
10. Fonctions logarithme népérien et exponentielle
    — Domaine de définition, propriétés, dérivée, réciprocité.
    — Fonctions logarithme et exponentielle en base quelconque.
    — Théorème de croissances comparées.
11. Fonctions circulaires réciproques
    Pour chacune des fonctions arcsin, arccos et arctan : définition comme fonction réciproque d'une fonction trigonométrique, domaine de définition, domaine de dérivabilité et expression de la dérivée.

I. Exercices d'application.

1. Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

3. Exercice. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \sqrt{x} \ln x$$

1. Prolonger la fonction f par continuité en 0. Soit g son prolongement.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction g.

4. Exercice. Soit la fonction f définie sur son ensemble de définition D_f par

$$f(x) = \sqrt{2 + x}$$

1. Déterminer D_f.
2. Prouver que f est une bijection d'un ensemble E dans un ensemble F à déterminer, de deux façons différentes :
   (a) En utilisant le théorème de la bijection.
   (b) Par le calcul.
3. Déterminer f^{-1}.

5. Exercice (plus difficile). Le but de cet exercice est de démontrer la proposition suivante

Proposition 0.0.1 *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$. Supposons que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$. Si*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$$

1. Montrer que
$$g(x) \neq g(a) \ ; \ \forall x \in]a, b[.$$
2. Soit $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et soit la fonction $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par
$$h(x) = f(x) - pg(x) \ ; \ \forall x \in [a, b].$$
À l'aide du théorème de Rolle, montrer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

3. On suppose que $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$$

4. *Application.* Calculer

$$\lim_{x \to (-1)^+} \frac{\arccos x - \pi}{\sqrt{1 - x^2}}$$

6. Exercice (plus difficile). Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \ln(\sqrt{x})$$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Soit un réel $x \geqslant 1$. Appliquer le théorème des accroissements finis sur $[1, x]$.
3. Encadrer f' sur $[1, x]$.
4. En déduire un encadrement de $f(x) - f(1)$ sur $[1, +\infty[$.
5. À l'aide de la question précédente retrouver le résultat

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Chapitre 3. Suites numériques

Compétences exigibles.

1. Introduction aux suites numériques.
   — Définition d'une suite numérique.
   — Définition de la monotonie d'une suite.
   — Définition d'une suite majorée/minorée/bornée.
2. Limite d'une suite numérique.
   — Définition d'une suite convergente (avec quantificateurs) à connaître.
   — Dans la pratique savoir calculer la limite d'une suite convergente ou montrer qu'elle est divergente.
   — Théorème de comparaison, des gendarmes pour les suites.
3. Exemples remarquables et critère de convergence.
   — Suite géométrique : définition, expression de u_n en fonction de u_0 et q, formule donnant la somme de n termes consécutifs.
   — Convergence vers des suites $(u_n)_n$ telle qu'il existe un réel $l < 1$ et un entier n_0 tels que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < l$, pour tout $n \geqslant n_0$.
4. Théorèmes de convergence.
   — Théorème de convergence monotone. Énoncé et application.
   — Suites adjacentes : définition, théorème de convergence.
   — Définition d'une suite extraite. Théorème de Bolzano-Weiestrass.

5. Suites récurrentes.
   - Définition d'une suite récurrente.
   - Condition suffisante de convergence d'une suite définie par récurrence.
   - Condition suffisante de monotonie d'une suite définie par récurrence.

Exercices communs

I. Exercices d'application.

1. Exercice. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = \frac{n+1}{2n+\sin n}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1. Montrer que la suite (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}$.
2. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$u_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\ ;\ \forall n \geqslant n_0$$

3. En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

2. Exercice. Soient $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}.$$

Montrer que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

3. Exercice. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = (1+(-1)^n)n\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer u_{2n} pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.
2. Calculer u_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$.
3. La suite (u_n) est-elle convergente ?

II. Problème. *Suite et fonction : calcul de la racine d'un réel positif.*
Soient $a > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_a(x) = x^2 - a$$

La courbe représentative de f est notée $\mathcal{C}_a$.

1. Tracer $\mathcal{C}_4$.
2. Pour tout $x \neq 0$, déterminer l'abscisse (notée $g_a(x)$) du point d'intersection de la tangente en x à $\mathcal{C}_a$ et de l'axe des abscisses.

3. Montrer que la suite (u_n) telle que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & g_a(u_n) \\ u_0 & = & 1 \end{array} \right.$$

   est bien définie.
4. Représenter graphiquement (pour $a = 4$) les termes u_0, u_1 et u_2.
5. Montrer que la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{a}$.
6. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
7. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.