Fonctions

Continuité en un point

Exercice 1. Soit $f(x) = \frac{x-6}{\sqrt{x+10}-4}$
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. f est-elle prolongeable par continuité en 6 ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. Étudier la continuité de f.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$.
1. Prouver que f est prolongeable par continuité en 1.
2. Donner un prolongement de f.

Exercice 4. On donne $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.
1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Prolonger f par continuité quand cela est possible.

Exercice 5. Soit $f(x) = \frac{\tan(x)-1}{x-\frac{\pi}{4}}$.
1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Prolonger f par continuité en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 6. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{|x|} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est-elle continue ?

Exercice 7. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-1}{|x|} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est-elle continue ?

Exercice 8. Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$. Soient f et g deux fonctions définies sur I et continues en x_0.
1. Rappeler la définition de la continuité en un point.
2. Prouver que $f+g$ est continue en x_0.
3. Prouver que fg est continue en x_0.

On suppose désormais que $f(x_0) \neq 0$.

4. Prouver que $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{3}$. On suppose que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$. Donner les valeurs possibles pour l.

Exercice 10. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = 3$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Prouver qu'il existe une suite de rationnels (r_n) qui converge vers x.
2. Prouver que $f(x) = 3$.
3. Conclure.

Continuité sur un intervalle

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^6 + x^2 - 3$.
1. Calculer $f(0)$ et $f(2)$.
2. Justifier l'existence d'un $\alpha \in [0; 2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Exercice 12. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10 + x cos(x)$. Prouver que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution.

Exercice 13.
1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Donner un exemple où :

2. I est borné et $f(I)$ ne l'est pas
3. I n'est pas borné et $f(I)$ est borné
4. I est ouvert et $f(I)$ et fermé
5. $I =]-\infty; +\infty[$ et $f(I)$ est ouvert

Exercice 14. Soit f une fonction continue sur un intervalle. On suppose que f ne s'annule jamais.

1. Traduire l'hypothèse à l'aide de quantificateurs.
2. Prouver que f est de signe constant.

Exercice 15. Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$.
Prouver que $\exists x_0 \in]0; 1[\colon f(x_0) = x_0$.

Exercice 16. Soit $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Prouver que $\exists x_0 \in]0; 1[\colon f(x_0) = 1 - x_0^2$.

Exercice 17. Soient $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ et $g : [0; 1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $g(0) = 1$ et $g(1) = 0$. Prouver que $\exists x_0 \in]0; 1[\colon f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 18.
1. Énoncer le théorème sur l'image continue d'un segment.

Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

2. Donner un exemple où $\min(f) \neq f(a)$ et $\max(f) \neq f(b)$.
3. Donner un exemple où $\min(f) = f(b)$ et $\max(f) = f(a)$.
4. Donner un exemple où $\min(f) = \max(f)$.
5. On supprime l'hypothèse de continuité. Donner un exemple où $f([a; b]) =]-\infty; +\infty[$.

Exercice 19. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\forall x \in [a; b], f(x) > 0$.

1. Prouver : $\exists \alpha > 0 : \forall x \in [a; b], f(x) \geq \alpha$.
2. Donner un exemple de fonction continue sur un intervalle, strictement positive, pour laquelle il est impossible de prouver 1.