Fonctions monotones et bijections

Théorème 1. *Soit f une fonction définie sur un* ***intervalle*** *$I \subset \mathbb{R}$. Si f est* ***continue*** *et* ***strictement monotone****, alors*

- *f établit une bijection de I dans l'intervalle image $J = f(I)$*
- *la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et a le même sens de variation que f*

Exercice 1. Soit $g(x) = x^2 + ln(x)$.
1. Donner D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Donner l'image de f. On rappelle que l'image de f est, par définition, égal à $f(D_f)$.
3. Prouver que f établit une bijection de D_f sur $f(D_f)$.

Exercice 2. On donne $f(x) = \sqrt{2+x}$.
1. Donner l'ensemble dé définition de f.
2. Prouver que f est une bijection (préciser entre quels ensembles) :
2. a. en utilisant le théorème de la bijection
2. b. par le calcul

Exercice 3. On donne $f(x) = ln(7x-3)$.
1. Donner l'ensemble dé définition de f.
2. Prouver que f est une bijection (préciser entre quels ensembles) :
2. a. en utilisant le théorème de la bijection
2. b. par le calcul

Exercice 4. Soit $f(x) = ln(1+x)$ et $g(x) = ln(1-x)$.
1. Donner les ensembles de définition de f et g.
2. Prouver que f et g sont des bijections et donner leurs bijections réciproques.
3. Donner les ensembles de définition de $g \circ f$ et de $f \circ g$.
4. Prouver que $g \circ f$ et de $f \circ g$ sont des bijections et donner leurs réciproques.

Exercice 5. Soit $\begin{array}{rrl} f: & \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ & x \mapsto & x^2 + x - 12 \end{array}$.
1. f est-elle injective ?
2. Déterminer les ensembles sur lesquels f est bijective.

Exercice 6. Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 4 fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que f_1 et f_2 sont croissantes et que g_1 et g_2 sont décroissantes.
1. Rappeler la définition de la croissance d'une fonction.
2. Prouver que $f_1 + f_2$ est croissante.
3. Prouver que $g_1 + g_2$ est décroissante.
4. Que peut-on dire de $f_1 + g_1$?

Exercice 7. Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 4 fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que f_1 et f_2 sont croissantes et que g_1 et g_2 sont décroissantes.
1. Prouver que $f_2 \circ f_1$ est croissante.
2. Prouver que $g_2 \circ g_1$ est croissante.
3. Que peut-on dire de $f_1 \circ g_1$?

Exercice 8. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux fonctions. On suppose que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$ (rappel : $\forall x \in E, Id_E(x) = x$).
1. Prouver que f est injective.
2. Prouver que f est surjective.
3. Conclure.

Exercice 9. Soit $f(x) = 4\sqrt{x-1}$ et $g(x) = \frac{x^2}{16} + 1$.
1. Donner D_f et D_g
2. Prouver que f et g sont bijectives et donner leurs réciproques.

Exercice 10. Soit $f :]-1; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.
1. Calculer $f \circ f$.
2. Que peut-on en déduire ?

Exercice 11. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Soit $y_0 \in f(I)$.
1. Justifier que f est bijective.
2. Prouver que f^{-1} a le même sens de variation que f.
3. L'équation $f(x) = y_0$ a-t-elle une solution ?

Exercice 12. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et monotone.
1. f est-elle bijective ?
2. Donner un contre-exemple.

Exercice 13. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone.
1. Prouver que f est injective.
2. On suppose que $f(I)$ est un intervalle. Prouver que f est continue.