Logarithme et exponentielle

Exercice 1. On considère l'équation $\ln(2x+1) = \ln(x+3)$ (E).
1. Déterminer l'ensemble sur lequel est définie l'équation (E).
2. Résoudre (E).

Exercice 2. On considère l'équation $\ln(x-3) = \ln(2x+5)$ (E).
1. Déterminer l'ensemble sur lequel est définie l'équation (E).
2. Résoudre (E).

Exercice 3. Résoudre l'inéquation $\ln(x^2 - x - 1) \leq 0$.

Exercice 4. Résoudre les équations :
1. $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$.
2. $-e^{2x} + 5e^x + 6 = 0$.
3. $e^{4x} - 1 = 0$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 + 4x + e^x$.
1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 6. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
1. En utilisant le changement de variable $X = \frac{1}{x}$, prouver que $\lim\limits_{X\to 0^+} X\ln(X) = 0$.
2. En utilisant le changement de variable $y^a = x$ dans $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, déterminer $\lim\limits_{y\to 0^+} y^a \ln(y)$.
3. Quel changement de variable utiliser dans quelle égalité pour déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$?

Exercice 7. On considère $f(x) = \frac{(x-2)^2(x-3)}{(x-1)^3(x-4)^4}$. On aimerait calculer $f'(x)$ de manière astucieuse.
1. Rappeler la formule donnant la dérivée de $\ln(|f|)$.
2. A l'aide de cette formule, exprimer f' à l'aide de f et de $(\ln(|f|)')$.
3. Calculer $f'(x)$.
4. Géneralisation : trouver une formule pour la dérivée de $f(x) = \dfrac{\displaystyle\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)^{\alpha_i}}{\displaystyle\prod_{j=0}^{n}(x-x'_j)^{\beta_j}}$.

Fonctions circulaires inverses

Exercice 8. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan(1-2x)$.
1. Tracer le graphe de la fonction arctan.
2. Déterminer l'ensemble de définition la fonction f.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Résoudre $f(x) = 0$.

Exercice 9. Quelques propriétés de la fonction arcsin.
1. Tracer le graphe de la restriction à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ de la fonction sin. Représenter les tangentes horizontales.
2. En déduire le graphe de la fonction arcsin.
3. Déterminer à l'aide du graphique l'ensemble de dérivabilité de la fonction arcsin.
4. Pour quels x la formule $\arcsin(\sin(x)) = x$ est-elle valable ?
5. Rappeler la formule de dérivation de la composée de deux fonctions.
A l'aide de cette formule, dériver l'équation $\arcsin(\sin(x)) = x$.
6. En posant $y = \sin(x)$ déterminer $\arcsin'(y)$.

Exercice 10. Reprendre l'exercice précédent avec la fonction arccos.

Exercice 11. Le but de l'exercie est de prouver que $\forall x \in [-1;1], \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$. On note $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$.
1. Calculer $f'x)$.
2. Conclure.

Exercice 12. Calculer :
1. $\arccos(\cos(\frac{2\pi}{3}))$
2. $\arccos(\cos(-\frac{2\pi}{3}))$
3. $\arccos(\cos(4\pi))$
4. $\arctan(\tan(\frac{3\pi}{4}))$

Exercice 13. Résoudre $\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 14. Résoudre $\arccos(\cos(x)) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 15. Simplifier :
1. $\sin(\arccos(x))$
2. $\cos(\arcsin(x))$
3. $\sin(2\arccos(x))$
4. $\cos(2\arcsin(x))$
5. $\sin(2\arcsin(x))$
6. $\cos(2\arccos(x))$