Logique et raisonnement

Logique

Exercice 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Compléter par le connecteur logique qui s'impose ; $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$.
1. $x^2 = 4$........$x = -2$.
2. $|x| = -x$........$x \in]-\infty; 0]$.
3. $x = \frac{\pi}{2}$..........$sin(2x) = 0$.
4. $x \in \mathbb{Z}$..........$|cos(\pi x)| = 0$.

Exercice 2. Soient P et Q deux assertions.
1. Dresser la table de vérité de (P et $P \Rightarrow Q$).
2. Servez-vous de 1. pour dresse la table de vérité de (P et $P \Rightarrow Q$)$\Rightarrow Q$.
3. Que constatez-vous ?

Exercice 3. 1. Rappeler la table de vérité de $P \Leftrightarrow Q$.
2. Dresser la table de vérité de ($P \Rightarrow Q$ et non(P)$\Rightarrow$non(Q)).
3. Conclure.

Exercice 4. L'assertion $(2 = 3) \Rightarrow (1 = 4)$ est-elle vraie ?

Exercice 5. Exprimer, en utilisant un langage formalisé les assertions suivantes :
1. L'entier m est impair.
2. 6 est pair.
3. Tout entier relatif est impair.
4. Le réel r est rationnel.
5. Tout entier naturel est rationnel.
6. Quels que soient deux réels non nuls, leur produit est non nul.
7. Le sinus de n'importe quel réel est compris entre -1 et 1.

Exercice 6. $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Nier les assertions suivantes.
1. $x \in]0; 1]$.
2. $x = 0$ ou $x < -3$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 10$.
4. $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.
5. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$.
6. $\exists l \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
8. $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c$.

Exercice 7. Comment quantifier l'expression $x + y^2 = 0$ pour obtenir une assertion vraie ?

Exercice 8. On considère l'assertion : "Si j'habite à Paris, alors j'habite en France.".
1. Donner la contraposée de cette assertion.
2. Donner la réciproque de cette assertion.

Raisonnement

Exercice 9. Modus Ponens.
Soient P et Q deux assertions.
1. Dresser la table de vérité de (P et $P \Rightarrow Q$).
2. Servez-vous de 1. pour dresse la table de vérité de (P et $P \Rightarrow Q$)$\Rightarrow Q$.
3. Que constatez-vous ?

Exercice 10. Contraposée.
1. Dresser les tables de vérité de l'assertion $P \Rightarrow Q$ et de l'assertion $non(Q) \Rightarrow non(P)$.
2. Conclure.

Exercice 11. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+\star})^2$. Montrer que si $a^2 + b^2 - 14ab = 0$, alors $\ln\left(\dfrac{a+b}{4}\right) = \dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.

Exercice 12. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^{+\star})^2$. Montrer que si $x \neq y$, alors $\ln x \neq \ln y$.

Exercice 13. Montrer qu'il est possible d'écrire la fonction exponentielle comme la somme d'une fonction paire f et d'une fonction g impaire.

Exercice 14. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 15. Démontrer que pour tout entier n : $2^n > n$.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une forme plus simple de l'expression :

$$1.1! + 2.2! + \cdots + n.n!$$

(Trouver une formule pour n petit, puis la démontrer par récurrence.)

Exercice 17. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prouver que si $x \neq y$, alors $e^x \neq e^y$.

Exercice 18. Prouver que si n est un entier naturel impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Exercice 19. Soit a et b deux réels strictement positifs. Prouver : $\frac{a}{a+1} = \frac{b}{b+1} \Rightarrow a = b$.