Révisions

La fonction arctan

Exercice 1. On considère l'expression $f(x) = x - \arctan(x)$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ? Calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer le signe de $f(x)$.
5. En déduire un encadrement de $\arctan(x)$ sur $[0; +\infty[$ et sur $]-\infty; 0]$.

Asymptotes

Définition 1. *On considère une fonction f définie sur $]-\infty; x_0[\cup]x_0; +\infty[$.*
1. Si $\exists b \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, on dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale en $+\infty$ pour f. Idem en $-\infty$.
2. Si $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale (en a) pour f. Idem en x_0^-.
3. Si il existe des réels $a \neq 0$ et b tels que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique en $+\infty$ pour f. Idem en $-\infty$.
On ne cherche des asymptotes obliques que si l'on n'a pas trouvé d'asymptote(s) horizontale(s). On a de plus :
3.1. $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ (si cette limite existe)
3.2. $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$ (si cette limite existe)

Exercice 2. On considère $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$.
1. Déterminer l'ensemble de défintion de f.
2. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de défintion.
3. Déterminer les asymptotes de f.

Exercice 3. Soit $f(x) = \frac{2x+x^2+\cos(x)}{2x}$.
1. Déterminer l'ensemble de défintion de f.
2. Déterminer les asymptotes verticales pour f.
3. Prouver que la droite d'équation $y = \frac{x}{2} + 1$ est asymptote oblique pour f en $+\infty$. Que dire en $-\infty$?

Exercice 4. On considère la fonction f définie par $\frac{2x^2+3x-2}{x-1}$.
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer toutes les asymptotes de f.

Suites

Exercice 5. f est la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-1}$.
1. Etudier les variations de f.
2. Rappeler ce qu'est un intervalle **stable** pour f.
3. Prouver qu'il n'exste aucun intervalle stable pour f.
4. Est-il possible de défnir une suite par $u_0 \geq 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$? Pourquoi ?

Exercice 6. f est la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+1}$.
1. Etudier les variations de f.
2. Trouver un intervalle $[a;b]$, stable pour f.
3. Est-il possible de défnir une suite par $u_0 \in [a;b]$ et $u_{n+1}=f(u_n)$? Pourquoi ?

Exercice 7. On considère la suite définie par $u_0 \in [0;1]$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=\cos u_n$.
1. Déterminer f telle que $u_{n+1}=f(u_n)$.
2. Prouver que $[0;1]$ est stable par f.
3. Etudier les variations de f. (u_n) est-elle monotone ?
4. Prouver que $0 \leq u_n \leq 1$.
5.1. Prouver que (u_{2n}) est monotone.
5.2. Déterminer pour quels u_0 (u_{2n}) est croissante et pour lesquels (u_{2n}) est décroissante.
5.3. Prouver que (u_{2n}) converge.
5.4. Déterminer la limite de (u_{2n}).
6. Recommencer 5. avec (u_{2n+1}).
7. Conclure.

Récurrence

Exercice 8. Prouver que

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$