Applications linéaires

Définition d'une application linéaire

Définition 1. *Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On dit que la fonction $f : E \to F$ est* ***linéaire*** *si :*

— $\forall (u,v) \in E^2, f(u+v) = f(u) + f(v)$ *(compatibilité de f avec les lois +)*

— $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E, f(\lambda.u) = \lambda.f(u)$ *(compatibilité avec les lois .)*

Si $E = F$, on dit alors que f est un ***endomorphisme*** *de E.*

Exercice 1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une fonction linéaire.
1. Prouver que $f(0_E) = 0_F$.
2. Prouver que $\forall u \in E, f(-u) = -f(u)$.

Exercice 2. Soit $\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \mapsto (x+3y, -x+z) \end{array}$. Prouver que f est linéaire.

Exercice 3. Prouver que $\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^3 \\ & x & \mapsto (2x, -x, +\frac{x}{4}) \end{array}$ est linéaire.

Exercice 4. La fonction $\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto (x+y+z, -x+y, y+2z^2) \end{array}$ est-elle linéaire ?

Exercice 5. Soit $\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}_2[X] & \to \mathbb{R}_2[X] \\ & P(X) & \mapsto 2P'(X) \end{array}$.
1. Quels sont les éléments de $\mathbb{R}_2[X]$?
2. Donner une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Prouver que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2[X]$.

Exercice 6. Prouver que $\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}_2[X] & \to \mathbb{R}_2[X] \\ & P(X) & \mapsto P(0) - 2P'(X) \end{array}$ est linéaire.

Exercice 7. On note $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$.
Prouver que la fonction $\begin{array}{rcl} \phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(t)dt \end{array}$ est linéaire.

Exemples d'applications linéaires

Exercice 8. Soit $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, -x+y, y+2z) \end{array}$. On note (i,j,k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1. Prouver que f est linéaire.
2. Calculer $f(i)$, $f(j)$ et $f(k)$. On écrira ces trois vecteurs en colonnes.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Calculer AX. Que constate-t-on ?

Définition 2. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont* ***supplémentaires dans*** *E, si :*

$$\forall x \in E, \exists! (x_1, x_2) \in F \times G : x = x_1 + x_2$$

Dans ce cas, on note $E = F \oplus G$. On peut alors définir :
la projection sur F parallèlement à G :

$$\begin{array}{rcl} p : E & \to & E \\ x & \mapsto & x_1 \end{array}$$

et la projection sur G parallèlement à F :

$$\begin{array}{rcl} q : E & \to & E \\ x & \mapsto & x_2 \end{array}$$

Proposition 1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F et G sont supplémentaires dans E si, et seulement si :*

— $dim(F) + dim(G) = dim(E)$

— $F \bigcap G = \{O_E\}$

Exercice 9. Soit $E = \mathbb{R}^2$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y - x = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y + x = 0 \right\}$.
1. Prouver que F et G sont supplémentaires dans E.
2. Exprimer la projection sur F parallèlement à G.
3. Exprimer la projection sur G parallèlement à F.
4. Représenter graphiquement ces deux projections.

Exercice 10. Soit $E=\mathbb{R}^3$, $F=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\ 0|\ x+y+z=0\right\}$ et $G=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid x=y \text{ et } y=z\right\}$.

1. Déterminer $\dim(F)$ et $\dim(G)$.
2. Prouver que F et G sont supplémentaires dans E.
3. Exprimer la projection sur F parallèlement à G.
4. Exprimer la projection sur G parallèlement à F.

Définition 3. *Soit $f: E\to F$ une fonction linéaire.*
*On appelle **noyau de** f, noté $\ker(f)$, l'ensemble des antécédents de 0 par f :* $\ker(f)=\{x\in E|f(x)=0\}$
*On appelle **image de** f l'ensemble des $y\in F$ qui ont un antécédent par f :* $\mathrm{Im}(f)=\{y\in F|\exists x\in E: y=f(x)\}$

Exercice 11. Soit $f: E\to F$ une fonction linéaire.
1. Prouver que $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Prouver que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 12. Soit $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto (-2x+y, x-2y)\end{array}$. On note (i,j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Prouver que f est linéaire.
2. Calculer, puis représenter $f(i)$ et $f(j)$.
3. Déterminer $\ker(f)$.
4. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 13. Soit $\begin{array}{lll} f: & \mathbb{R}_2[X] & \to \mathbb{R}^3 \\ & P(X) & \mapsto (P(1), P(\frac{1}{2}), P(2))\end{array}$. On note (i,j,k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Prouver que f est linéaire.
2. Déterminer $\ker(f)$.
3. Justifier que f est bijective.
4. Trouver trois polynômes P_1, P_2 et P_3 tels que $f(P_1)=i$, $f(P_2)=j$ et $f(P_3)=k$. Comment s'appellent ces trois polynômes ?

Rang d'une famille de vecteurs - Rang d'une matrice

Définition 4. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(x_1,x_2,...,x_n)$ une famille de vecteurs de E. On appelle **rang** $(x_1,x_2,...,x_n)$ la dimension de l'espace engendré par $(x_1,x_2,...,x_n)$. On le note :*

$$rg(x_1,x_2,...,x_n)=\dim Vect(x_1,x_2,...,x_n)$$

Définition 5. *Le rang d'une matrice est le rang de ses vecteurs colonnes.*

Proposition 2. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie **n** et $(x_1,x_2,...,x_p)$ une famille de **p** vecteurs de E. Alors :*

1. $rg(x_1,x_2,...,x_p)\le p$
2. $rg(x_1,x_2,...,x_p)\le n$
3. $rg(x_1,x_2,...,x_p)=n \Leftrightarrow (x_1,x_2,...,x_p)$ *est génératrice*
4. $rg(x_1,x_2,...,x_p)=p \Leftrightarrow (x_1,x_2,...,x_p)$ *est libre*

Proposition 3. *On ne change pas le rang d'une matrice en effectuant les opérations autorisées pour la méthode du pivot de Gauss.*

Exercice 14. Déterminer le rang de la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\3&0&5&-4\\-1&-1&-2&0\end{pmatrix}$$

Exercice 15. Dans $\mathbb{R}_4[X]$, on considère la famille $(P_1,P_2,\dots,P_{10})$ où $\forall k\in[\![1,10]\!]$, $P_k=X^4+kX^2+(2k+1)$. Quel est le rang de cette famille ?

Exercice 16. Déterminer le rang de la famille $\left(\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\3\\1\\8\end{pmatrix}\right)$ de $\mathbb{R}^4$.